

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE

1.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale.

1.1.1. Șiruri de numere reale.

Presupunem cunoscute noțiunile de bază despre mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale, mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi, mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale și mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale.

Reamintim că pe \mathbb{R} se poate defini o structură algebrică de corp comutativ total ordonat la fel ca în \mathbb{Q} dar cele două mulțimi se deosebesc esențial prin funcționarea în \mathbb{R} a axiomei marginii superioare, care constituie punctul de plecare în stabilirea tuturor rezultatelor profunde ale analizei.

Reamintim că definind *modulul* unui număr real x astfel:

$$|x| = \max \{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

se verifică imediat următoarele proprietăți:

[N₁] $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[N₂] $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[N₃] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

De asemenea, definind funcția $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$d(x, y) = |x - y|$$

se verifică imediat, folosind [N₁], [N₂], [N₃], următoarele proprietăți:

[D₁] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

[D₂] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[D₃] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$

Numărul real și pozitiv $d(x, y)$ este numit *distanța euclidiană* între numerele x, y , funcția d se numește *metrică*, iar (\mathbb{R}, d) este un spațiu metric. Utilizând această noțiune se poate exprima cât de “aproprite” sunt două numere reale și se poate introduce noțiunea de șir convergent de numere reale, cunoscută din liceu, pe care o vom reaminti, precum și noțiunea de șir fundamental de numere reale pe care o vom prezenta în continuare.

Definiția 1.1.1.1. Se numește *șir de numere reale* orice funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este definit un număr real $x_n = f(n)$ numit *termenul de rang n* , sau *termenul general al șirului*; șirul însuși se notează $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar mulțimea $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = x_n\}$ se numește *mulțimea termenilor șirului*.

Observația 1.1.1.1. Trebuie făcută distincția între un șir și mulțimea termenilor lui, deoarece două șiruri distincte pot avea aceeași mulțime de termeni. De exemplu, $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = (-1)^n$ și $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = (-1)^{n+1}$ sunt două șiruri distincte cu aceeași mulțime de termeni $\{-1, 1\}$.

Definiția 1.1.1.2. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale se numește *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numește *punct limită* pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În caz contrar, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *divergent*.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ este punct limită pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se mai spune că acest șir *converge la x* , sau că x este *limita șirului* și se notează $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Definiția 1.1.1.3. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ un șir de numere reale.

Fie $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(m) = n_m$ un șir strict crescător de numere naturale. Funcția $\varphi = f \circ h$ se numește *subșir* al șirului f .

Evident, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(m) = f(h(m)) = f(n_m) = x_{n_m}$ iar $n_m \geq m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Definiția 1.1.1.4. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ un șir de numere reale. Elementul $x \in \mathbb{R}$ se numește *punct de acumulare* pentru șirul f dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $m \in \mathbb{N}$ există $n_m \geq m$ încât $|x_{n_m} - x| < \varepsilon$ adică $d(x_{n_m}, x) < \varepsilon$.

Observația 1.1.1.2. a) Se poate demonstra că $x \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru un șir f de numere reale dacă și numai dacă există un subșir al acestuia care are limita x (*lema lui Cesaro*). Este evident că orice punct limită pentru un șir este punct de acumulare pentru acesta. Reciproca acestei afirmații nu este, în general, adevărată. De exemplu, șirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$ are două puncte de acumulare (-1 și 1) dar nu are nici un punct limită.

b) Un șir convergent de numere reale are un singur punct de acumulare (limita șirului); dacă $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ este un șir mărginit de numere reale, iar $\gamma(f)$ este mulțimea punctelor de acumulare ale șirului f , se poate demonstra că $\gamma(f) \neq \emptyset$, aceasta fiind consecință a axiomei marginii superioare, extrem de importantă în demonstrația teoremei 1.1.1.1. În $\overline{\mathbb{R}}$, $\gamma(f)$ are întotdeauna margine inferioară și margine superioară. Se notează $\liminf x_n = \inf \gamma(f)$ și se numește *limita inferioară* a șirului f ; analog,

$\limsup x_n = \sup \gamma(f)$ se numește *limita superioară* a șirului f . Se poate arăta că un șir mărginit de numere reale este convergent dacă și numai dacă

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

c) Proprietățile specifice legate, fie de structura algebrică a lui \mathbb{R} fie de proprietatea de a fi o mulțime total ordonată sunt cunoscute, în mare parte, din liceu și au mai mică importanță pentru demersul nostru. De aceea vom prezenta aici doar proprietățile șirurilor de numere reale legate de completitudinea lui \mathbb{R} , foarte importante în practică și nestudiate în liceu.

Definiția 1.1.1.5. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ un șir de numere reale. Șirul f se numește *șir fundamental* (sau șir *Cauchy*) dacă și numai dacă pentru orice

$\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ încât dacă $n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ și $m \geq n_0$ atunci

$|x_n - x_m| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ și orice $p \in \mathbb{N}$.

Observația 1.1.1.3. În definiția convergenței unui șir apare în mod explicit limita șirului, pe când în definiția unui șir fundamental intervin numai termeni ai șirului, deci aceasta din urmă este o definiție intrinsecă. Determinarea limitei este dificilă, în multe situații imposibilă. Prin urmare, teorema următoare este extrem de importantă:

Teorema 1.1.1.1. (criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă el este un șir fundamental. (Se spune că \mathbb{R} , în raport cu distanța euclidiană este spațiu metric complet)

Observația 1.1.1.4. Având în vedere această teoremă, pentru testarea convergenței unui șir de numere reale este suficient să se verifice condiția intrinsecă de a fi șir fundamental. Apoi definiția 1.1.1.2. arată că

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$, deci putem aproxima $x \approx x_n$ și aproximarea este cu atât mai

bună cu cât rangul n este mai mare. Referitor la evaluarea erorii cu care se face această aproximare, putem preciza următoarele: dacă $|x_{n+p} - x_n| \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este

fundamental, deci convergent; dacă $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ se poate arăta că $|x_n - x| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $x \approx x_n$. Evident, dacă se impune ca eroarea să fie mai mică decât ε dat, se va determina cea mai mică valoare n_ε a lui n pentru care $y_n < \varepsilon$ și se va aproxima $x \approx x_n$.

Exemplul 1.1.1.1. Fie $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Deoarece

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul f nu este fundamental, deci nici convergent.

Exemplul 1.1.1.2. Fie $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Deoarece } |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k!|}{k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \\ &\frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice } n, p \in \mathbb{N}^* \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ deducem că șirul } f \text{ este șir fundamental, deci convergent.} \end{aligned}$$

Prin urmare, există și este unic $a \in \mathbb{R}, a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dar a nu se poate determina cu exactitate. Pentru a

determina o valoare aproximativă, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} (de exemplu) observăm că $\frac{1}{n+1} <$

$$\frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n+1 > 10^3 \Leftrightarrow n > 10^3 - 1.$$

Prin urmare, cel mai mic n pentru care $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3}$ este 10^3 . Deci $a \approx a_{1000}$

Se poate demonstra că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, intervalele $(-\infty, a], [a, b], [a, \infty)$ sunt spații metrice complete în raport cu metrica euclidiană.

Fie X unul dintre aceste intervale sau \mathbb{R} . Funcția $f: X \rightarrow X$ se numește *contracție* dacă există $c \in [0, 1)$ numit *coeficient de contracție* astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Utilizând teorema 1.1.1.1. reformulată pentru X se poate demonstra următorul rezultat important cunoscut sub numele de *Teorema de punct fix a lui Banach* sau *Principiul contracției*:

Teorema 1.1.1.2. Pentru orice contracție $f: X \rightarrow X$ există și este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$. Punctul ξ se numește *punct fix* al aplicației f . Trebuie reținută metoda de determinare a punctului fix cunoscută sub numele de metoda aproximațiilor successive: prima aproximație $x_0 \in X$ este aleasă arbitrar, apoi aproximațiile $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$ sunt determinate succesiv folosind f ; se

demonstrează că $|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$, unde c este coeficientul de contracție, $\delta = d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|$; indiferent de alegerea lui x_0 șirul de aproximații succesive $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la aceeași limită ξ . Formula precisă $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ este înlocuită în practică prin formula de aproximare $\xi \approx x_n$. Pentru a

evalua eroarea care apare în această aproximare, se poate arăta că $|x_n - \xi| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

și se raționează apoi ca în observația 1.1.1.4.

1.1.2. Serii de numere reale.

Noțiunea de serie de numere reale a apărut din necesitatea de a da un sens natural sumei termenilor unui șir de numere reale. Deoarece nu se pot aduna (în sens algebric) o infinitate de numere

reale, realizarea acestui scop a fost posibilă numai cu ajutorul noțiunii de limită, numai în anumite cazuri, studiul seriilor îmbinând studiul sumelor finite cu cel al limitelor de șiruri.

A) Serii convergente. Criterii generale de convergență

Definiția 1.1.2.1. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ un șir de numere reale.

Fie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, g(n) = s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Perechea de șiruri (f, g) se numește *serie generată de șirul f* . Pentru

fiecare $n \in \mathbb{N}$, s_n se numește *suma parțială de ordin n* a seriei, iar șirul g se numește *șirul sumelor parțiale asociat șirului f* . Seria (f, g) se numește *convergentă* dacă șirul g al sumelor parțiale este convergent și *divergentă* în caz contrar. Dacă seria (f, g) este convergentă, se definește *suma seriei* ca fiind numărul real s

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ și se notează } s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Observația 1.1.2.1. a) Deși poate crea confuzii, notația $\sum_{n \geq 0} x_n$ pentru seria (f, g) este frecvent folosită.

Trebuie însă mereu făcută distincția între seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ și suma sa, $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, care este un element asociat

seriei numai în caz de convergență și care reprezintă suma termenilor șirului dat. În cazul în care seria este divergentă, nu putem atribui nici un sens sumei termenilor șirului care generează seria.

b) În studiul unei serii, rolul principal este jucat de șirul sumelor parțiale, care sunt sume finite. Prin trecerea la limită însă, se pierde o seamă de proprietăți ale sumelor finite. Astfel, la sumele seriilor nu avem comutativitate, asociativitate, seriile nu pot fi, în general, înmulțite.

c) Dacă se renunță la un număr finit de termeni ai unei serii (sau dacă se adaugă un număr finit de termeni) seria nou obținută va avea aceeași natură ca și seria inițială. În caz de convergență, suma se modifică scăzând (sau adăugând) suma finită a termenilor la care se renunță (respectiv, care se adaugă)

d) Problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii și, în caz de convergență, evaluarea exactă sau măcar aproximativă a sumei seriei respective.

Exemplul 1.1.2.1. Seria $\sum_{n \geq 0} q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$ este fixat, se numește *serie geometrică de rație q* . Sumele

parțiale asociate sunt:

$$s_0 = 1, s_1 = 1 + q, s_2 = 1 + q + q^2, \dots, s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n, \dots$$

Se demonstrează prin inducție că:

$$s_n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$ dacă și numai dacă $q \in (-1, 1)$, rezultă că seria geometrică de rație q este

convergentă dacă și numai dacă $|q| < 1$ și, în acest caz, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$.

Exemplul 1.1.2.2. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ se numește *serie armonică*. Sumele parțiale sunt: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ..., $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, ... Deoarece $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (vezi exemplul 1.1.1.1.) rezultă că șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ al sumelor parțiale nu este șir fundamental, deci nici convergent. Rezultă că seria armonică este divergentă.

Exemplul 1.1.2.3. Să considerăm acum seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n!}{n(n+1)}$. Șirul sumelor parțiale are în acest caz termenul general $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Acest șir a fost studiat în exemplul 1.1.1.2 unde s-a arătat că este șir fundamental, deci convergent. Rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n!}{n(n+1)}$ este convergentă.

Observația 1.1.2.2. În exemplul 1.1.2.1. am putut determina natura și chiar suma seriei considerate exprimând convenabil termenul general al șirului sumelor parțiale. Acest lucru nu este posibil întotdeauna. În exemplul 1.1.2.2. se deduce că seria este divergentă, fără a găsi o formă convenabilă pentru s_n . În exemplul 1.1.2.3. se deduce că seria este convergentă, dar nu se poate găsi o expresie convenabilă pentru s_n și, prin urmare, nu se poate cunoaște cu exactitate suma seriei.

Este necesară, deci, dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor, indicând criteriile de convergență care țin cont de forma termenului general al seriei studiate. Pentru o serie care se dovedește a fi convergentă (în urma aplicării unui criteriu de convergență) se aproximează suma seriei cu o sumă parțială de un ordin convenabil ales (în funcție de eroarea permisă de problemă)

Teorema 1.1.2.1. (*criteriul necesar de convergență*)

Dacă seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Observația 1.1.2.3. Condiția din teorema 1.1.2.1. este doar necesară, dar nu și suficientă pentru convergența unei serii. De exemplu, șirul $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ este convergent și are limita zero, dar seria generată de acest șir (seria armonică) nu este convergentă. Din teoremă rezultă imediat că, dacă un șir f este divergent sau este convergent cu limita diferită de zero, atunci seria generată de șirul f este divergentă. De exemplu, seria $\sum_{n \geq 2} \sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ este divergentă deoarece șirul $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu are limită.

Teorema 1.1.2.2. a) Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, seria $\sum_{n \geq 0} \lambda x_n$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n \geq 0} x_n$;

b) Dacă seriile $\sum_{n \geq 0} x_n$, $\sum_{n \geq 0} y_n$ sunt convergente, cu sumele s , respectiv σ , atunci seriile $\sum_{n \geq 0} (x_n + y_n)$,

$\sum_{n \geq 0} (x_n - y_n)$ sunt convergente, cu sumele $s + \sigma$, respectiv $s - \sigma$.

Teorema 1.1.2.3. (criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii)

Seria de numere reale $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_0$ și oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ să avem:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Observând că $x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p} = s_{n+p} - s_n$, esența demonstrației constă în aplicarea criteriului general de convergență al lui Cauchy șirului sumelor parțiale. (vezi și exemplele 1.1.1.2. și 1.1.2.3.)

O clasă foarte importantă de serii o constituie seriile absolut convergente.

Definiția 1.1.2.2. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$. Seria de numere reale $\sum_{n \geq 0} x_n$ se numește *absolut convergentă*

dacă seria de numere reale pozitive $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 1.1.2.4. Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.

Observația 1.1.2.4. Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente. De exemplu, seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ numită *serie armonică alternată*, este

convergentă (vezi exemplul 1.1.2.5) dar nu este absolut convergentă deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.)

Definiția 1.1.2.3. O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă, se numește *semiconvergentă*.

Seria armonică alternată este un exemplu de serie semi-convergentă.

Seriile semiconvergente au o proprietate ce le face puțin utilizabile, cunoscută sub numele de *teorema lui Riemann*: dacă seria de numere reale (f, g) , $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ este semiconvergentă, există o permutare σ a mulțimii \mathbb{N} , astfel încât seria generată de șirul $f \circ \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \sigma)(n) = x_{\sigma(n)}$ să fie divergentă; pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există o permutare τ a lui \mathbb{N} astfel încât seria generată de șirul $f \circ \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \tau)(n) = x_{\tau(n)}$ să fie convergentă și să aibă suma α .

Rezultă, de aici, că seriile semiconvergente au o comportare foarte diferită de cea a sumelor finite.

Spre deosebire de acestea, dacă într-o serie absolut convergentă modificăm ordinea termenilor, nici natura, nici suma seriei nu se schimbă (*teorema lui Dirichlet*)

Astfel, seriile absolut convergente au o comportare asemănătoare cu cea a sumelor finite; de aceea ele sunt cele mai des utilizate.

Studiul seriilor absolut convergente înseamnă de fapt studiul seriilor *cu termeni pozitivi*. Pentru asemenea serii se pot formula multe criterii care dau condiții suficiente de convergență. Prezentăm în continuare pe cele mai importante.

B) Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență

Teorema 1.1.2.5. O serie de numere reale și pozitive este convergentă, dacă și numai dacă, șirul sumelor ei parțiale este mărginit.

Teorema 1.1.2.6. (criteriul comparației) Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât

să existe $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$.

- a) dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două serii au aceeași natură;
- b) dacă $l = 0$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă;
- c) dacă $l = \infty$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este divergentă.

Teorema 1.1.2.7. (criteriul rădăcinii al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

- a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ și $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{x_n} \leq q$, atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă.
- b) Dacă $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$ pentru o infinitate de indici, atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Teorema 1.1.2.8. (criteriul raportului, al lui d'Alembert)

Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

- a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ și $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, atunci seria este convergentă.
- b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ și $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

- a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Observatia 1.1.2.5. Dacă $l = l$ în corolarul teoremei 1.1.2.7. (sau 1.1.2.8.) nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei. Spre exemplu, să considerăm seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$, $\sum_{n \geq 1} y_n$ unde $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$.

Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.). Seria $\sum_{n \geq 1} y_n$ este însă convergentă. (Pentru fiecare

$n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $s_n = l - \frac{1}{n+1}$ și, prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$)

În situațiile în care criteriul raportului nu poate decide natura seriei se poate folosi:

Teorema 1.1.2.9. (criteriul lui Raabe - Duhamel)

Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ și $r > 1$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq r$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

a) Dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă.

Exemplul 1.1.2.4. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ se numește *serie armonică generală*. Este evident că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} =$

1 pentru orice $\alpha > 0$, deci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului (și nici cu criteriul rădăcinii). Dar

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right] = \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Se știe din liceu că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Folosind *criteriul cu șiruri* al limitei unei

funcții (de asemenea, cunoscut din liceu) deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Rezultă astfel că pentru $\alpha > 1$ seria armonică generală este convergentă, iar pentru $\alpha < 1$ este divergentă. Pentru $\alpha = 1$ se obține seria armonică despre care s-a arătat anterior (vezi exemplul 1.1.2.2.) că este divergentă.

Teorema 1.1.2.10. (*criteriul integral al lui Cauchy*) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă, descrescătoare și fie $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$F(n) = \int_0^n f(x) dx \text{ este mărginit.}$$

Observația 1.1.2.6. Teorema rămâne valabilă și în cazul în care $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, unde $a > 0$.

Cu ajutorul acestui criteriu putem stabili foarte ușor natura seriei armonice generale (studiată în exemplul 1.1.2.4). Este suficient să considerăm funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ și să observăm

că, pentru $\alpha \neq 1$, $F(n) = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\alpha > 1$, avem: $F(n) = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) < \frac{1}{\alpha-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, șirul F este mărginit, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha < 1$, avem:

$F(n) = \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \infty$ deci șirul F nu este mărginit, deci seria este divergentă.

C) Serii alternate.

Pentru studiul unei serii care *nu este absolut convergentă* se poate folosi direct criteriul general al lui Cauchy (teorema 1.1.2.3.) sau următoarea teoremă care se demonstrează cu ajutorul acestuia.

Teorema 1.1.2.11. (*criteriul lui Abel*) Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale având șirul sumelor parțiale asociat mărginit. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale, descrescător și convergent către zero. Atunci seria

$$\sum_{n \geq 0} a_n z_n \text{ este convergentă.}$$

Corolar. (*criteriul lui Leibnitz pentru serii alternate*)

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale, descrescător și convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ este convergentă. (o asemenea serie se numește *serie alternată*)

Exemplul 1.1.2.5. Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, unde $\alpha > 0$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$; pentru $\alpha > 1$ această serie este și convergentă și absolut convergentă (convergența se poate deduce din convergența absolută, sau, direct, cu criteriul lui Leibnitz)

D) Aproximarea sumei

Observația 1.1.2.7. Pentru o serie care s-a dovedit a fi convergentă, dar nu este posibil să-i determinăm suma, este important să putem evalua eroarea făcută, dacă se aproximează suma seriei cu o sumă parțială. Sunt situații în care se poate evalua ușor această eroare și, prin urmare, se poate obține suma seriei cu precizia dorită:

a) dacă $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ atunci seria este convergentă

(rezultă din teorema 1.1.2.3.). Se poate arăta că $|s_n - s| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $s \approx s_n$ (vezi și observația 1.1.1.4.).

b) dacă există $q \in (0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$, atunci aplicând

criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ se deduce că seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci și convergentă.

Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $|s_n - s| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

c) dacă există $q \in (0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q$, atunci aplicând

criteriul raportului seriei $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ se deduce că seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci și

convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $|s_n - s| \leq |x_n| \cdot \frac{q}{1-q}$.

d) pentru o serie alternată $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} a_n$ convergentă se poate arăta că:

$$0 < s_{2n} - s < a_{2n+1}, \quad 0 < s - s_{2n+1} < a_{2n+2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci, dacă aproximăm suma s a unei serii alternate ce satisface condițiile criteriului lui Leibniz cu suma parțială de ordinul n , facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat; eroarea este prin lipsă dacă n este impar și prin adaos, dacă n este par.

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE

1.2 Exerciții rezolvate

Exercițiul 1.2.1. Stabiliți dacă următoarele șiruri sunt fundamentale:

- a) $x_n = \frac{n+2}{3n+5}, n \in \mathbb{N}$
- b) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$
- c) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- d) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}, n \in \mathbb{N}$
- e) $x_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

Soluții

a) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{p}{(3n+3p+5)(3n+5)} < \frac{p}{3p(3n+5)} = \frac{1}{3(3n+5)}$ și majorantul este un șir convergent la 0, al cărui termen general nu depinde de p . Rezultă că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir fundamental.

b) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}$. Observăm că pentru $p = n$ obținem $x_{2n} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots +$

$\frac{1}{\sqrt{n+n}} > \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$. Rezultă de aici că $|x_{2n} - x_n|$ nu tinde către 0, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este șir fundamental.

c) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$. Cum majorantul este un șir convergent la 0 și nu depinde de p , rezultă că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir fundamental.

d) $|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1},$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

e) Deoarece $x_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n-1 + \frac{1}{n+1} > n-1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n-1 > M$ (de exemplu $n = [M] + 2$), prin urmare există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > M$ deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este majorat, deci este nemărginit. Prin urmare, nu este fundamental.

Exercițiul 1.2.2. Stabiliți dacă următoarele șiruri sunt convergente:

$$\text{a) } x_n = \frac{n+1}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{b) } x_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } x_n = \frac{2n \cdot n!}{n^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{e) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{f) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, n \in \mathbb{N}^*$$

Soluții.

a) Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit: $0 < \frac{n+1}{n^2+2} < \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \leq 1$, pentru orice $n \geq 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 =$

$\frac{2}{3}$, deci $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3} - \frac{n+1}{n^2+2} =$$

$$= \frac{-n^2 - 3n + 1}{(n^2 + 2n + 3)(n^2 + 2)} < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Rezultă că șirul } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este convergent.}$$

b) Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este mărginit (vezi exercițiul precedent), deci nu este convergent.

c) Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit. Într-adevăr, aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $1, 2, \dots, n$

obținem $\frac{1+2+3+\dots+n}{n} > \sqrt[n]{n!}$, adică $\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$ sau $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; înmulțind inegalitatea cu

$\frac{2^n}{n^n}$, obținem $x_n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, pentru orice $n \geq 2$. Cum $x_1 = 2 < 3$, rezultă că $x_n < 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident, $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $x_n \in (0, 3)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit.

$$\text{Deoarece } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2}{(n+1)^n} \cdot n^n =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \text{ deducem c\^a \^sirul este strict descresc\^ator. Rezult\^a c\^a}$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

d) \^Sirul este fundamental (vezi exerci\^tiul precedent), iar (\mathbb{R}, d) este spa\^tiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci \^sirul este convergent.

S\^a observ\^am c\^a $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci \^sirul este strict cresc\^ator. Deoarece $1 < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = x_n <$

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

adic\^a $x_n \in (1, 2)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezult\^a c\^a \^sirul este \^si m\^arginit, deci este convergent.

e) \^Sirul este fundamental (vezi exerci\^tiul precedent), iar \mathbb{R} \^in raport cu distan\^ta euclidian\^a este spa\^tiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci \^sirul este convergent.

S\^a observ\^am c\^a, spre deosebire de exerci\^tiul precedent, acest \^sir nu este monoton, deoarece diferen\^ta $x_{n+1} - x_n = \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}$ nu p\^astreaz\^a semn constant pe \mathbb{N} , deci nu se poate aplica teorema de convergen\^ta a \^sirurilor monotone.

f) \^Sirul nu este fundamental (vezi exerci\^tiul precedent). Din teorema 1.1.1.1. deducem c\^a acest \^sir nu este convergent.

Exerci\^tiul 1.2.3. Aproxima\^ti limita \^sirului $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$ cu dou\^a zecimale exacte.

Solu\^tie. Despre acest \^sir s-a demonstrat c\^a este fundamental, deci este convergent. Am ar\^atat c\^a $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dac\^a not\^am $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci $|x - x_n| \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru ca \^in aproximarea $x \approx x_n$ s\^a avem dou\^a zecimale exacte este suficient ca

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^2}.$$

Prin urmare x_{100} aproximeaz\^a pe x cu dou\^a zecimale exacte.

Exerci\^tiul 1.2.4. Folosind principiul contrac\^ției s\^a se calculeze r\^ad\^acina ecua\^ției $x^3 + 4x - 1 = 0$ cu 4 zecimale exacte.

Solu\^tie. Ecua\^ția are o singur\^a r\^ad\^acin\^a real\^a situat\^a \^in intervalul $[0, 1]$ care este spa\^tiu metric complet. Ecua\^ția se poate scrie sub forma

$$x = \frac{1}{x^2 + 4} \stackrel{\text{not}}{=} f(x)$$

Pe aceast\^a mul\^time f este o contrac\^ție cu coeficientul $\frac{1}{8}$ pentru c\^a $|f'(x)| =$

$= \left| \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2} \right| < \frac{2}{4 \cdot 4} = \frac{1}{8}$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Alegem $x_0 = 0$. Atunci $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = \left| \frac{1}{4} - 0 \right| = \frac{1}{4}$. Rezultă că $\frac{\delta}{1-c} \cdot c^n = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8^n} < 10^{-4}$ pentru $n \geq 4$. Deci x_4 este aproximarea rădăcinii cu patru zecimale exacte.

Exercițiul 1.2.5. Determinați limitele extreme ale șirurilor:

a) $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluții. a) Prezența lui $(-1)^n$ sugerează considerarea următoarelor două subșiruri:

$$\begin{aligned} x_{2m} &= \frac{1 + (-1)^{2m}}{2} + (-1)^{2m} \cdot \frac{2m}{4m+1} = 1 + \frac{2m}{4m+1}, m \in \mathbb{N} \\ x_{2m+1} &= \frac{1 + (-1)^{2m+1}}{2} + (-1)^{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{2(2m+1)+1} = 0 - \frac{2m+1}{4m+3} = \\ &= -\frac{2m+1}{4m+3}, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Evident, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = -\frac{1}{2}$

Prin urmare, mulțimea punctelor de acumulare a acestui șir este $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$. Deci $\underline{\lim} x_n = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim} x_n = \frac{3}{2}$.

b) Analog, $x_{2m} = \frac{(2m)^2}{2m} = 2m, m \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2m+1} = \frac{(2m+1)^{2(-1)}}{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^3}, m \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = \infty$ și $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = 0$, deducem că $\underline{\lim} x_n = 0$ și $\overline{\lim} x_n = \infty$.

Exercițiul 1.2.6. Să se studieze natura seriilor următoare și să se calculeze suma în caz de convergență:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^n}$; c) $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$.

Soluții.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Evident, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Prin urmare, seria dată este convergentă și suma sa este $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$

$$b) x_n = \frac{n}{3^n}, n \in \mathbb{N}^* \text{ deci } s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}.$$

$$s_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right)}_{n-1 \text{ termeni}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{3^n} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)}_{n \text{ termeni}}.$$

Atunci,

$$s_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \right) + \frac{1}{3^n},$$

adică

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \cdot \frac{\frac{1}{3^{n-k}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 - \frac{1}{3^{n-k+1}} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n}{3^{n+1}} \right] \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{4}$, deci seria dată este convergentă și

$$\text{suma sa este } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

$$c) x_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, deci șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ al sumelor parțiale este divergent.

Rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ deci această condiție este necesară dar nu și suficientă pentru convergența unei serii.

Exercițiul 1.2.7. Să se studieze natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$; b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}$, unde $a > 0$

c) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n$, unde $a > 0$; d) $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n \cdot n^n}{n!}$, unde $a > 0$

e) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$

Soluții.

a) Deoarece $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} \cdot \sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5} = \sqrt{7}$ deducem că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$ este convergentă (vezi teorema 1.1.2.6)

b) Pentru $a > 1$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^n}$ este convergentă (serie geometrică cu rația $\frac{1}{a}$). Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n \cdot \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1}{n} \cdot \frac{a^n}{a^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1}{n} \cdot \frac{1}{a - \frac{1}{a^n}} = 0, \text{ din teorema 1.1.2.6. deducem că seria dată este}$$

convergentă.

Pentru $a = 1$ seria devine $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ iar aceasta este convergentă (ex. 1.3.6.a)

Pentru $0 < a < 1$ se poate folosi ușor teorema 1.1.2.6. folosind ca termen de comparație seria armonică $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ despre care se știe că este divergentă.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a + a^2 + \dots + a^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a}{1 - a^{n+1}} = 1 - a \text{ (căci } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0 \text{ deoarece } a \in (0, 1))$$

Deoarece $0 < 1 - a < \infty$ rezultă că cele două serii au aceeași natură. Rezultă astfel că, pentru $a \in (0, 1)$ seria dată este divergentă

c) $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$. Prezența lui n la exponent sugerează aplicarea criteriului rădăcinii:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot a = a \cdot e.$$

Prin urmare, dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$, deci seria este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$. În acest caz, $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $e^n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}$, de unde

$$x_n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ de unde obținem că $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

$$\text{d) } x_n = \frac{a^n \cdot n^n}{n!}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot n^n} = a \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot e.$$

Dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, de unde, cu criteriul raportului, obținem că $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$ de unde deducem că $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$.

Pentru $a = \frac{1}{e}$ avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou inegalitatea $e <$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{ valabilă pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \text{ obținem } \frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n+1} \text{ adică } (n+1)x_{n+1} > nx_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Rezultă } nx_n > (n-1)x_{n-1} \text{ adică } x_n > x_{n-1} \cdot \frac{1}{n} \text{ și } \sum_{k=1}^n x_k > x_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Cum $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă deducem (vezi teorema 1.1.2.5.) că $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

e) Punând $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ obținem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1, \text{ deci nu putem utiliza criteriul raportului. Deoarece}$$

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = n \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1, \text{ obținem, cu criteriul Raabe Duhamel, că}$$

$\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Exercițiul 1.2.8. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2} :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}, \text{ b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^n}, \text{ c) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n!)^2}$$

Soluții. a) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci rezultă că,

$$\text{pentru orice } n \geq 2 \text{ are loc } |s - s_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \text{ unde } s \text{ este suma seriei, iar } s_n \text{ este suma parțială de ordinul } n.$$

Deci $|s - s_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru ca s_n să aproximeze s cu o eroare mai mică decât 10^{-2}

este suficient să determinăm cel mai mic rang n care satisface inegalitatea $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^2}$.

Se obține $n = 7$ deci $s \approx s_7 = 1.291285935$ cu două zecimale exacte.

b) Deoarece $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{10^2}$ pentru orice $n \geq 4$ rezultă că

$0 < s - s_3 < \frac{1}{4^4} < \frac{1}{10^2}$, $0 < s_4 - s < \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^2}$. Deci $s_3 = -7870370370$ aproximează pe s prin lipsă, iar $s_4 = -7831307870$ prin adaos, ambele cu o eroare mai mică decât 10^{-2} .

c) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$ de unde rezultă evaluarea:

$$0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}, \text{ adică } 0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Cum $\frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3} < 10^{-2}$ pentru orice $n \geq 3$ rezultă că $s \approx s_3 = 1,277777778$.

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE

1.3. Exerciții propuse

Exercițiul 1.3.1. Demonstrați că următoarele șiruri sunt fundamentale:

$$\text{a) } x_n = \frac{n+3}{5n+4}, n \in \mathbb{N} \quad \text{b) } x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{c) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k+3)}{k^2}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{d) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\arctg(kx)}{k^3}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{e) } x_n = \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{\pi}{k}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{f) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!(k+2)}, n \in \mathbb{N}^*$$

Exercițiul 1.3.2. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că există $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$ astfel încât $|x_{n+1} - x_n| \leq c \cdot |x_n - x_{n-1}|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este fundamental.

Exercițiul 1.3.3. Stabiliți dacă următoarele șiruri sunt convergente:

$$\text{a) } x_n = \frac{n+3}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \quad \text{b) } x_n = \frac{n^3+2}{3n^2+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } x_n = \left(\cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right) n^2, n \in \mathbb{N} \quad \text{d) } x_n = (1 + \cos n\pi) \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{e) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{f) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{g) } x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}, n \in \mathbb{N}^*$$

R. a) convergent, b) divergent, c) divergent, d) divergent, e) convergent, f) convergent, g) convergent.

Exercițiul 1.3.4. Determinați limitele extreme ale șirurilor:

$$\text{a) } x_n = \frac{1}{n} n^{(-1)^n} + \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{b) } x_n = (1 + (-1)^n)n, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

R. a) -1, 1; b) 0, ∞ ; c) 0, 1.

Exercițiul 1.3.5. Determinați limitele șirurilor:

$$\text{a) } x_n = \frac{n+1}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}, n \in \mathbb{N} \quad \text{b) } x_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

$$\text{c) } x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$$

R. a) 1, b) 1, c) $\frac{4}{e}$.

Exercițiul 1.3.6. Să se studieze natura seriilor următoare și să se calculeze suma în caz de convergență:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \alpha \geq 0$$

$$c) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{\alpha^n}, |\alpha| > 1$$

$$d) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$e) \sum_{n \geq 2} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} \right)$$

$$f) \sum_{n \geq 2} \frac{\ln((n+1)/n)}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$$

$$g) \sum_{n \geq 1} \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

$$h) \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2}$$

$$\text{Indicație: } \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctg \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}} = \arctg \frac{1}{n} - \arctg \frac{1}{n+1}$$

$$\text{R. a) convergentă, } s = \frac{5}{4}, \text{ b) convergentă, } s = \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$c) \text{ convergentă, } s = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, \text{ d) divergentă, } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

$$e) \text{ convergentă, } s = \sqrt{a} - 1, \text{ f) convergentă, } s = \frac{1}{\ln 2},$$

$$g) \text{ convergentă, } s = \frac{\pi}{4}, \text{ h) divergentă.}$$

Exercițiul 1.3.7. Folosind criteriul rădăcinii să se studieze convergența următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \arctg^n \left(\frac{1}{n} \right) \quad b) \sum_{n \geq 1} n \cdot a^n, a > 0 \quad c) \sum_{n \geq 1} \operatorname{tg}^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \sin^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \quad e) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$$

R. a) convergentă, b) convergentă dacă $a < 1$, divergentă dacă $a \geq 1$,

c) divergentă, d) convergentă, e) convergentă.

Exercițiul 1.3.8. Folosind criteriul raportului, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n} \quad e) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{2^n + 1} \quad f) \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă, e) divergentă, f) convergentă.

Exercițiul 1.3.9. Să se studieze convergența următoarelor serii alternate. În caz de convergență, să se precizeze dacă seriile sunt semiconvergente.

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$c) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad d) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\text{e) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \quad \text{f) } \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$$

R. a) semiconvergentă, b) semiconvergentă, c) absolut convergentă,
d) semiconvergentă, e) divergentă, f) absolut convergentă

Exercițiul 1.3.10. Demonstrați că următoarele serii sunt absolut convergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(na)}{n^2}, a \in \mathbb{R}; \text{ b) } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(na)}{n^2}, a \in \mathbb{R}; \text{ c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(na)}{2^n}, a \in \mathbb{R}$$

Exercițiul 1.3.11. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2} :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n \cdot n!}; \text{ b) } \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}; \text{ c) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n}; \text{ d) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}.$$

R. a) $s \approx s_2 = 0,1050000000$; b) $s \approx s_7 = 6,676399794$;

c) $s \approx s_6 = 0,6718750000$; d) $s \approx s_5 = 0,6333333333$

Exercițiul 1.3.12. Să se determine suma seriei de termen general x_n dacă:

$$\text{a) } x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, n \in \mathbb{N}^* \text{ b) } x_n = \frac{3^n + 2^n}{6^n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } x_n = \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right), n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d) } x_n = \sqrt{n+2+\alpha} - 2\sqrt{n+1+\alpha} + \sqrt{n+\alpha}, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{e) } x_n = \ln \cos \frac{\alpha}{2^n}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

R. a) 1; b) $7/2$; c) $\ln 3$; d) $\sqrt{\alpha} - \sqrt{1+\alpha}$; e) $\ln \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

Exercițiul 1.3.13. Să se stabilească natura seriilor următoare:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n^p}, p > 0, \alpha \in (0, \pi) \text{ b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{3^n}$$

$$\text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$\text{e) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^n \sqrt[n]{n^3}} \quad \text{f) } \sum_{n \geq 1} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă,
e) divergentă, f) convergentă.

Exercițiul 1.3.14. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n \geq 1} a^n \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2^n}$, $a > 0$,

$\omega \in (0, \pi)$.

R. Seria este convergentă pentru $a \in (0, 2)$ și divergentă pentru $a \geq 2$.

Exercițiul 1.3.15. Să se stabilească dacă se poate aplica criteriul lui Leibniz pentru seriile:

a) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 + \cos n\pi}{n}$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{\arctg(\operatorname{tg} n)}$

c) $\sum_{n \geq 1} \sin \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} \cdot \pi$

R. a) Nu, b) Da, c) Da.

2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

2.1.1. Serii de puteri reale.

Definiția 2.1.1.1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Se numește *serie de puteri reale* cu coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$, unde

$$f_n(x) = a_n x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Principalele rezultate privind mulțimea de convergență a unei asemenea serii, precum și proprietățile sumei, (datorate matematicienilor Abel, Cauchy, Hadamard) sunt concentrate în teorema următoare.

Teorema 2.1.1.1. Fie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ o serie de puteri reale, cu coeficienții dați a_n , $n \in \mathbb{N}$ și $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & , \text{daca } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{daca } 0 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty \\ \infty & , \text{daca } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

- dacă $r = 0$, singurul punct de convergență al seriei este $x = 0$;
- dacă $r > 0$, seria este absolut convergentă pe intervalul $(-r, r)$ și este divergentă pentru $|x| > r$;
- dacă $x = r$ este punct de convergență al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog pentru $x = -r$;
- dacă $r > 0$, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul $(-r, r)$ și aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
- dacă $r > 0$, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (-r, r)$.

Observația 2.1.1.1. a) Numărul r se numește *rază de convergență* a seriei de puteri. Formula de calcul pentru r se numește *formula Cauchy-Hadamard*.

b) Se poate demonstra că, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ există, atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ și cele două limite sunt

egale. Prin urmare, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, atunci $\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (cu convenția $\frac{1}{0} = \infty$ și $\frac{1}{\infty} = 0$).

2.1.2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie.

Definiția 2.1.2.1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale și $n \in \mathbb{N}$, fixat. Se numește *serie Taylor*, cu coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, *centrată în x_0* , seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Este evident că orice serie de puteri este o serie Taylor centrată în punctul $x_0 = 0$. De asemenea, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, printr-o translație $x - x_0 = y$, o serie Taylor centrată în x_0 se transformă într-o serie de puteri, centrată în origine. Din acest motiv, teorema 2.1.3.1. de la serii de puteri poate fi extinsă ușor la serii Taylor. Se obține astfel:

Teorema 2.1.2.1. Fie $\sum_{n \geq 0} f_n$ o serie Taylor cu coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, centrată în x_0 și $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & , \text{daca } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{daca } 0 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty \\ \infty & , \text{daca } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

- dacă $r = 0$, singurul punct de convergență al seriei este $x = x_0$;
- dacă $r > 0$, seria este absolut convergentă pe intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ și divergentă pentru $|x - x_0| > r$;
- dacă $r > 0$, seria este uniform convergentă pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;
- dacă $x = x_0 + r$ este punct de convergență al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog, pentru $x = x_0 - r$;
- dacă $r > 0$, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ și aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
- dacă $r > 0$, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;

Rămâne valabilă observația referitoare la determinarea razei de convergență r .

În teorema precedentă, fiind dați coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$ și punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, se deduc proprietăți ale sumei seriei. Problema poate fi pusă însă și invers: fiind dată suma seriei și punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, să se determine coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$. Apare, astfel, problema găsirii unei serii Taylor a cărei sumă să fie o funcție dată, funcție care se va numi dezvoltabilă în serie Taylor.

Definiția 2.1.2.2. Fie I un interval deschis al axei reale, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcția f se numește *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0* , dacă există șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $\varepsilon > 0$ astfel încât:

- $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, $\varepsilon \leq r$, unde r este raza de convergență a seriei Taylor cu coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, centrată în x_0 ;
- pentru orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ avem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Apar în mod natural două probleme:

- În ce condiții o funcție f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct dat?
- Cum se pot calcula coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, dacă se cunoaște funcția f ?

Referitor la problema a doua, ținând seama de teorema 2.1.4.1., e), avem:

Teorema 2.1.2.2. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ fixat. Dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0 ,

atunci f admite derivate de orice ordin în x_0 și, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$.

Observația 2.1.2.1. Din această teorema rezultă că existența derivatelor de orice ordin într-o vecinătate a lui x_0 este o condiție necesară pentru ca o funcție să fie dezvoltabilă în serie Taylor. Ea nu este însă și suficientă.

Exemplul 2.1.4.1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ are derivate de orice ordin pe \mathbb{R} , $f^{(n)}_{(0)} = 0$, pentru

orice $n \in \mathbb{N}$. Ea nu este însă dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$, pentru că, dacă ar fi, ar rezulta

$a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ și, prin urmare, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ceea ce este fals.

Observația 2.1.2.2. Din teorema precedentă rezultă că, dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0 , există o singură serie Taylor a cărei sumă să fie f pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ și anume, seria

cu coeficienții $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$, $n \in \mathbb{N}$. Această serie se mai numește *seria Taylor asociată funcției f în jurul*

punctului x_0 . Prin urmare, referitor la prima problemă formulată anterior, este suficient să stabilim în ce condiții o funcție indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) este suma seriei Taylor asociate pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Pentru aceasta, este deosebit de utilă următoarea:

Teorema 2.1.2.3. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I , $x_0 \in I$ fixat. Atunci, pentru orice $x \in I$, există cel puțin un punct ξ (depinzând de x) situat între x_0 și x , astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Aceasta este *formula lui Taylor* pentru o funcție reală, de $n+1$ ori derivabilă pe I cu restul $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ în sensul lui Lagrange. Polinomul:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *polinomul Taylor de gradul n* asociat funcției f și punctului fixat x_0 .

Observația 2.1.2.3. Coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$ obținuți în teorema 2.1.4.2. coincid cu cei din formula lui Taylor pentru funcția f și punctul x_0 . Deci, polinomul lui Taylor $T_n(x)$ asociat funcției f și punctului x_0 este suma parțială de ordin n a seriei Taylor asociate funcției f în jurul punctului x_0 și, prin urmare, referitor la prima problemă, obținem acum:

Teorema 2.1.2.4. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) pe o vecinătate a punctului fixat $x_0 \in I$. Atunci funcția f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0 , dacă și numai dacă, există o vecinătate V a punctului x_0 , încât, pentru orice $x \in V$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Cu ajutorul acestei teoreme se obține ușor următorul criteriu, utilizat de obicei în practică:

Teorema 2.1.2.5. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in I$. Presupunem că există $M > 0$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in V$, să avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$ (funcția f are derivatele egal mărginite pe V). Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0 , adică $f(x) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ pentru orice } x \in V.$$

2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.2. Exerciții rezolvate.

Exercițiul 2.2.1. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor de puteri: a) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

b) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluție.

a) Raza de convergență este: $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Pentru $x = -1$ obținem $f_n(-1) = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$

Seria generată de șirul numeric $\{f_n(-1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ are aceeași natură cu seria armonică, deci este divergentă.

Pentru $x = 1$, obținem $f_n(1) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$ Acest șir generează seria armonică alternată care, conform criteriului lui Leibniz, este convergentă. Mulțimea de convergență a seriei de puteri considerate este deci $(-1, 1]$.

Fie $S: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}.$

Pentru orice $x \in (-1, 1), S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$

Din $S'(x) = \frac{1}{1+x}, x \in (-1, 1)$ și $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1).$ Ținând seama de

observația de mai sus, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2.$

Deci, suma seriei armonice alternate este $\ln 2.$ Acest rezultat permite aproximarea numărului $\ln 2$ prin numere raționale și evaluarea erorii făcute.

b) Raza de convergență este dată de: $r = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}$ unde

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}.$$

Deci $\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{1}{\sqrt[m]{2n+1}}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}.$ Deoarece $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$, șirul $(\sqrt[m]{|a_m|})_{m \in \mathbb{N}}$ are punctele de

acumulare 0 și 1. Prin urmare $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1$, deci $r = 1.$

Pentru $x = -1$ se obține seria numerică $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ care este convergentă (se aplică criteriul lui Leibniz).

Pentru $x = 1$ se obține seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ care este de asemenea convergentă.

Prin urmare, mulțimea de convergență este $A = [-1, 1]$.

Fie acum $S : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Aplicând teorema de derivare termen cu termen, deducem că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$. Deci $S(x) = \arctg x + C$. Din $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = \arctg x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece S este continuă în 1, deducem acum că $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} S(x) = \frac{\pi}{4}$, rezultat ce permite aproximarea numărului π prin numere

raționale și evaluarea erorii făcute. Analog se obține $S(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercițiul 2.2.2. Să se determine mulțimea de convergență a seriei:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+n+1} \cdot \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2} \right)^n, x^2 \neq \frac{1}{2}.$$

Soluție.

Dacă se notează $\frac{x^2-2}{1-2x^2} = y$ se obține o serie de puteri cu coeficienții $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+n+1}$,

$n \in \mathbb{N}$. Raza de convergență a acestei serii de puteri este $r = 1$ deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. Mulțimea de

convergență a seriei $\sum_{n \geq 0} a_n y^n$ este $[-1, 1]$. Mulțimea de convergență a seriei date se obține acum

rezolvând $-1 \leq \frac{x^2-2}{1-2x^2} \leq 1$, de unde rezultă

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Exercițiul 2.2.3. Să se arate că funcțiile $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ și $h(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$ sunt dezvoltabile în serie de puteri pe \mathbb{R} și să se determine seriile corespunzătoare.

Soluție.

Prin inducție se arată că $f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$,

$$g^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \text{ și } h^{(n)}(x) = e^x \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ și $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ rezultă că f și g sunt dezvoltabile în serie de puteri pe \mathbb{R} .

Pentru orice $a > 0$ și orice $x \in [-a, a]$ și $n \in \mathbb{N}$ avem $0 < h^{(n)}(x) \leq e^a$, deci h este dezvoltabilă în serie de puteri pe orice interval de forma $[-a, a]$ deci este dezvoltabilă pe \mathbb{R} .

Pentru $n = 2m$ avem $f^{(n)}(0) = \sin m\pi = 0$, $g^{(n)}(0) = \cos m\pi = (-1)^m$, iar pentru $n = 2m+1$, $f^{(n)}(0) = \sin \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^m$ și $g^{(n)}(0) = 0$.

Rezultă dezvoltările:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum $h^{(n)}(0) = e^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă dezvoltarea

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 2.2.4. Să se dezvolte în serie de puteri funcția:

$$f(x) = (1+x)^\alpha \text{ cu } x > -1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluție.

Prin inducție se demonstrează că

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}, \text{ deci} \\ f^{(n)}(0) &= \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1).\end{aligned}$$

Se obține dezvoltarea

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

pentru $|x| < 1$.

Exercițiul 2.2.5. Să se dezvolte în serie de puteri funcția

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), x \in \mathbb{R}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}. \text{ Pentru } |x| < 1 \text{ avem: } f'(x) = (1+x^2)^{-1/2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} x^2 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \dots \text{ de unde, prin integrare, rezultă } f(x) = x + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \text{ pentru orice } x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Exercițiul 2.2.6. Să se calculeze $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cu șase zecimale exacte.

Soluție.

$$\text{În dezvoltarea } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ punând } x = -\frac{1}{2}, \text{ obținem}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{e}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}. \text{ Cum într-o serie alternată eroarea este inferioară primului termen neglijat, din} \\ \frac{1}{2^n \cdot n!} &< \frac{1}{10^6}, \text{ prin încercări se obține } n = 7, \text{ deci}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} - \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{16 \cdot 4!} - \frac{1}{32 \cdot 5!} + \frac{1}{64 \cdot 6!} = \dots$$

Exercițiul 2.2.7. Să se calculeze cu trei zecimale exacte $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Soluție.

$$\text{Din } \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}, \text{ obținem}$$

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4n+1}$$

Calculând suma primilor cinci termeni prin transformarea lor în fracții zecimale, prin lipsă și prin adaos acolo unde transformarea nu se face exact, cu patru zecimale, obținem

$$0,9035 < \int_0^1 \cos x^2 dx < 0,9036, \text{ deci } \int_0^1 \cos x^2 dx \text{ este aproximată cu trei zecimale exacte prin } 0,903.$$

2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.3. Exerciții propuse

Exercițiul 2.3.1. Să se determine mulțimea de convergență a seriilor următoare:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} n! x^n, x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}, x \in \mathbb{R} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} x^n, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{e) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{3^{n/2} \sqrt{1+n^2}} \operatorname{tg}^n x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\mathbf{R. a) } \{0\}, \text{ b) } \mathbb{R}, \text{ c) } [-1, 1], \text{ d) } \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right), \text{ e) } \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right).$$

Exercițiul 2.3.2. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{R. a) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1); \text{ b) } f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$$

$$x \in (-1, 1).$$

Exercițiul 2.3.3. Să se determine sumele următoare, folosind seriile de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n-3} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n-1)} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6n+1} \quad \text{e) }$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Indicație:

$$\text{a) Se folosește relația } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ și teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{3n-3} dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{3n-3} \right] dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-x^3)^{n-1} \right] dx =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

b) Se procedează ca mai sus.

$$\text{c) Se observă că } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \text{ a căror sumă se determină folosind teorema de derivare termen cu termen a unei serii de puteri. Suma cerută se obține pentru } x = 1.$$

d) Se folosește seria de puteri $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{6n+1}}{6n+1}$ și teorema de derivare termen cu termen.

e) Se descompune $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ în fracții simple.

R. a) $\frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$, b) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right]$, c) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$,

d) $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln(7 + 4\sqrt{3}) + \frac{\pi}{6}$, e) $\frac{\pi}{8}$.

Exercițiul 2.3.4. Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} x^{n+2}$

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^n$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+2}{2n+1} x^{2n+1}$

R. a) $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$; b) $S(x) = -\frac{(1-x)^2}{2} \ln(1-x) - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4}$

$x \in (-1, 1)$ iar în -1 și 1 se prelungește prin continuitate; c) $S(x) = \ln \frac{2-x}{4}$, $x \in (-\infty, 0]$; d) $S(x) =$

$\frac{2x^3 - x}{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Exercițiul 2.3.5. Să se calculeze $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)} \cdot \frac{1}{3^{2n}}$.

R. Se studiază seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n+1)3^{2n}} \cdot x^{4n+1}$.

Se obține $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ și

$s = S(1) = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Exercițiul 2.3.6. Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții indicând și mulțimile de convergență:

a) $f(x) = \ln(1+x)$ b) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

d) $f(x) = xe^{-2x}$ e) $f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$ f) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

g) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$ h) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ i) $f(x) = (1+e^x)^3$

j) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

R. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1]$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n, |x| < 1$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n, |x| < 1$, d) $x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} x^n}{(n-1)!}, x \in \mathbb{R}$

e) $2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)3^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$; f) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1, 1)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} x^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$;

i) $8 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n, x \in \mathbb{R}$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, x \in [0, \infty)$

Exercițiul 2.3.7. Fie $f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1]$

a) Să se dezvolte această funcție în serie de puteri ale lui x

b) Folosind această dezvoltare să se calculeze suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{(2n+2)! 2^{2n+2}}$.

Indicație:

a) Se derivează funcția și se dezvoltă derivata în serie de puteri. Prin integrare termen cu termen se obține, pentru $x \in (-1, 1)$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Deoarece $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$, dezvoltarea se prelungește la intervalul $[-1, 1]$.

b) Deoarece $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$, integrând termen cu termen seria de la a), punând $x = 0$ se obține $c = -1$, deci

$$\frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$$

$$\text{Pentru } x = \frac{1}{2} \text{ obținem } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{2^{2n+2}} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8}. \text{ Deoarece } (2n+2)! = (2n-1)!!(2n)!!(2n+1)(2n+2) \text{ rezultă că suma cerută este}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{8}.$$

Exercițiul 2.3.8. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția

$$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2.$$

Indicație:

Folosind dezvoltarea funcției $\arcsin x$, pentru $x \neq 0$, se obține dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\frac{\arcsin x}{x}$ și apoi se ridică la pătrat.

Exercițiul 2.3.9. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx & \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \\ \text{c) } \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx & \text{d) } \int_{0,1}^1 \frac{e^x}{x} dx \end{array}$$

R. a) 1, 605...; b) 0, 927...; c) 0, 244...; d) 3, 518...

3 FUNCTII CONTINUE

3.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale.

3.1.1. Spațiul euclidian \mathbb{R}^p

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ fixat, se definește

$$\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{de } p \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) : x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}\}$$

De exemplu, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Mulțimea \mathbb{R}^p poate fi înzestrată cu o structură algebrică de *spațiu vectorial real*, definind adunarea și înmulțirea cu scalari prin:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_p)\end{aligned}$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

În timp ce mulțimea numerelor reale este total ordonată, între elementele mulțimii \mathbb{R}^p nu poate fi definită o relație de ordine totală compatibilă cu structura algebrică, de aceea unele proprietăți ale funcțiilor reale de o variabilă reală (legate de monotonie, spre exemplu) nu se pot enunța în cazul funcțiilor reale de mai multe variabile reale (funcții definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în \mathbb{R}).

Structura de bază însă cu care trebuie să fie dotate mulțimile pentru studiul caracteristic analizei matematice, bazat pe noțiunea de limită, este cea de spațiu topologic, în care se poate exprima faptul că două elemente sunt sau nu *aproprate*, cu ajutorul noțiunii de vecinătate, în cazul general, sau cu ajutorul noțiunii de metrică (sau distanță) în cazurile uzuale.

Definiția 3.1.1.1. Dacă X este o mulțime nevidă astfel încât, pentru fiecare $x \in X$, să poată fi evidențiată o familie $\mathcal{U}(x)$ de submulțimi ale lui X cu proprietățile:

[V₁] oricare ar fi $V \in \mathcal{U}(x)$, $x \in V$;

[V₂] dacă $U, V \in \mathcal{U}(x)$ atunci $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;

[V₃] dacă $V \in \mathcal{U}(x)$ și $V \subseteq A$ atunci $A \in \mathcal{U}(x)$;

[V₄] oricare ar fi $V \in \mathcal{U}(x)$ există $W \in \mathcal{U}(x)$ încât $V \in \mathcal{U}(y)$ pentru orice $y \in W$,

atunci se spune că pe X este definită o *structură topologică* (sau o *topologie*). Mulțimea X se numește în acest caz *spațiu topologic*, iar familia $\mathcal{U}(x)$ se numește *sistem de vecinătăți ale punctului x* .

Definiția 3.1.1.2. Fie X o mulțime nevidă, arbitrară. Funcția $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacând proprietățile:

[D₁] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$

[D₂] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$

[D₃] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$

se numește *metrică* (distanță) pe X , iar perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Dacă (X, d) este un spațiu metric, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, atunci mulțimea:

$$S(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$$

se numește *sferă deschisă cu centrul în x și raza r* .

Teorema 3.1.1.1. Dacă (X, d) este un spațiu metric, pentru fiecare $x \in X$, familia $\mathcal{U}(x) = \{V \subset X : \exists r > 0, S(x, r) \subset V\}$ formează un sistem de vecinătăți ale punctului x ; deci orice spațiu metric este în mod natural un spațiu topologic.

În plus, pentru orice $x \in X$, $\mathcal{U}(x)$ are două proprietăți remarcabile:

1) Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci există $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$ (proprietatea de separare)

2) Există $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{U}(x)$ astfel încât:

- oricare ar fi $V \in \mathcal{U}(x)$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ încât $V_{n_0} \subset V$

- dacă $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \leq m$ atunci $V_n \supset V_m$ (această proprietate este cunoscută sub numele de *prima axiomă a numărabilității*)

Aceste proprietăți permit rezolvarea unor probleme mari (unicitatea limitei, caracterizarea limitei și continuității unei funcții cu ajutorul șirurilor, etc) la nivelul spațiilor metrice, la fel ca în cazul axei reale.

Observația 3.1.1.1. Structura de spațiu metric pe X **nu** presupune existența unei structuri algebrice pe X .

Revenind la \mathbb{R}^p care este înzestrat cu o structură algebrică pe spațiu vectorial real, putem defini în mod natural o structură de spațiu metric (deci o structură topologică) utilizând două noțiuni particulare importante, produsul scalar și norma, care se definesc numai în spații vectoriale.

Definiția 3.1.1.3. *Produsul scalar euclidian* între elementele lui \mathbb{R}^p este definit prin:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Norma euclidiană pe \mathbb{R}^p este generată de produsul euclidian:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Distanța euclidiană este generată de norma euclidiană:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_p - y_p)^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Se demonstrează ușor că d satisface proprietățile $[D_1]$, $[D_2]$, $[D_3]$ din definiția 3.1.1.2., deci (\mathbb{R}^p, d) este spațiu metric și, prin urmare, spațiu topologic; sistemul de vecinătăți ale fiecărui punct din \mathbb{R}^p se definește ca în teorema 3.1.1.1.

Observația 3.1.1.2. a) Pentru $p = 1$ avem $\|x\| = |x|$, distanța euclidiană este $d(x, y) = |x - y|$, iar pentru $\varepsilon > 0$ și $x_0 \in \mathbb{R}$, $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

b) Pentru $p = 2$, dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ care reprezintă lungimea segmentului ce unește punctele $O(0, 0)$ și $A(x, y)$; distanța euclidiană este:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iar pentru $\varepsilon > 0$ și $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixat,

$$S((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul cercului cu centrul în (x_0, y_0) și raza ε , adică discul cu centrul în (x_0, y_0) și raza ε .

c) Pentru $p = 3$, avem $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, iar distanța euclidiană este:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

pentru $\varepsilon > 0$ și $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixat,

$$S((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul sferei geometrice cu centrul în (x_0, y_0, z_0) și raza ε .

3.1.2. Șiruri în \mathbb{R}^p .

Definiția 3.1.2.1. Se numește *șir de elemente din \mathbb{R}^p* orice funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$, termenul de rang n , $x_n = f(n) \in \mathbb{R}^p$, deci este de forma $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$ unde $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $k = 1, 2, \dots, p$ fie $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$. Șirurile f_1, f_2, \dots, f_p de numere reale se numesc *șiruri componente ale șirului f* .

Considerând \mathbb{R}^p înzestrat cu metrica euclidiană, se pot defini, la fel ca pentru șirurile de numere reale, noțiunile de punct limită, punct de acumulare, șir convergent, șir fundamental.

Definiția 3.1.2.2. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$; $f(n) = x_n$ un șir de elemente din \mathbb{R}^p . Șirul f se numește *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numește *punct limită* pentru șirul f . În caz contrar, șirul f se numește *divergent*. Șirul f se numește *șir fundamental* (sau șir Cauchy) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, dacă $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ atunci $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ și orice $p \in \mathbb{N}$.

Teorema următoare stabilește faptul că studiul șirurilor din \mathbb{R}^p , $p > 1$ se reduce la studiul șirurilor din \mathbb{R} și că \mathbb{R}^p înzestrat cu distanța euclidiană este un spațiu metric complet.

Teorema 3.1.2.1. Fie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$ un șir de elemente din \mathbb{R}^p . Pentru fiecare $k = 1, 2, \dots, p$ fie $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$.

a) Șirul f este convergent și are limita $x = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă șirurile componente f_1, f_2, \dots, f_p sunt convergente și $x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k, k = 1, 2, \dots, p$

b) Șirul f este șir fundamental dacă și numai dacă toate șirurile componente sunt șiruri fundamentale.

c) Șirul f este convergent dacă și numai dacă el este șir fundamental, deci \mathbb{R}^p în raport cu distanța euclidiană este spațiu metric complet.

Observația 3.1.2.1. a) Din această teoremă deducem că limita unui șir convergent din \mathbb{R}^p se calculează pe componente.

De exemplu, șirul $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^2, f(n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n+1}{n+2} \right)$ converge către $(0, 1)$.

b) În $\mathbb{R}^p, p \geq 2$ nu se pot defini convenabil șiruri monotone, ca în cazul șirurilor de numere reale, deoarece în $\mathbb{R}^p, p \geq 2$ nu se poate introduce o relație de ordine totală compatibilă cu structura algebrică.

3.1.3. Limita unei funcții de mai multe variabile

Este cunoscută, din liceu, noțiunea de limită a unei funcții reale de o variabilă reală într-un punct de acumulare al domeniului său de definiție. Prezentăm acum această noțiune pentru funcții definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în \mathbb{R} . Este necesar să precizăm, mai întâi, noțiunea de punct de acumulare al unei mulțimi $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Acest lucru este posibil la fel ca în

$A \subseteq \mathbb{R}$ deoarece cunoaștem sistemul de vecinătăți ale fiecărui punct din \mathbb{R}^p .

Definiția 3.1.3.1. Considerăm \mathbb{R}^p înzestrat cu metrica euclidiană.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^p$ arbitrar. Elementul x se numește *punct de acumulare* pentru mulțimea A , dacă oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(x)$ avem $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează A' .

Definiția 3.1.3.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p, f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară, $l \in \mathbb{R}, a \in A'$. Elementul l se numește *limita funcției f în punctul a* dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$. Se notează $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Observația 3.1.3.1. a) Deoarece $a \in A', (U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(a)$. Deoarece există elemente ale mulțimii A oricât de „aproape” de a , iar funcția f ia în acestea valori oricât de „aproape” de l . De aceea, spunem că l este limita funcției f când x „tinde” la a , „se apropie” oricât de mult de a . Este evident că nu are sens să ne punem problema limitei unei funcții într-un punct care nu este punct de acumulare pentru domeniul său de definiție.

b) Definiția punctului de acumulare al unei mulțimi, precum și definiția limitei unei funcții într-un punct pot fi extinse, cu aceeași formulare, la cazul spațiilor topologice oarecare deoarece utilizează doar noțiunea de vecinătate. Considerarea spațiilor metrice concrete (care sunt spații topologice particulare) prezintă unele avantaje cum ar fi unicitatea limitei, caracterizarea ei cu șiruri, care nu se regăsesc în cazul general.

Teorema 3.1.3.1. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară, $a \in A'$. Dacă funcția f are limită în punctul a , atunci aceasta este unică.

Teorema 3.1.3.2. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A', l \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ cu $0 < d(x, a) < \delta$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$;

c) oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din mulțimea $A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Observația 3.1.3.2. a) Dacă $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A', l \in \mathbb{R}$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $|f(x) - l| \leq g(x)$ și dacă $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ atunci, evident $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

b) Dacă $x = (x^1, x^2, \dots, x^p), a = (a^1, a^2, \dots, a^p)$ atunci

$$d(x, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^p (x^k - a^k)^2}$$

ținând cont de dubla inegalitate evidentă:

$$|x^i - a^i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p (x^k - a^k)^2} \leq \sum_{k=1}^p |x^k - a^k|, i = 1, 2, \dots, p$$

rezultă imediat că $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există

$\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in A$ cu $0 < |x^i - a^i| < \delta, i = 1, 2, \dots, p$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c) Dacă există două șiruri $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ și $(b_n)_n \in \mathbb{N}$ de elemente din $A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ astfel încât

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ atunci, evident, funcția f nu are limită în punctul a .

Pentru o funcție reală de p variabile reale putem defini o noțiune particulară de limită, și anume, limita după o direcție.

Definiția 3.1.3.3. Dacă $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A',$ atunci pentru orice vector

$v \neq 0$ din \mathbb{R}^p , se numește *limita funcției f în punctul a după direcția lui v* (atunci când există) numărul

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv)$$

Observația 3.1.3.3. a) Evident, punctele $x = a + tv$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu v ceea ce justifică terminologia.

b) Dacă există $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ atunci există și limita funcției f în punctul a , după direcția lui v și este egală cu l .

Reciproca acestei afirmații este falsă. Funcția $f(x, y) = \frac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}, y^2 + 2x \neq 0$ are limita -1 în $(0, 0)$ pe orice

direcție dar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nu există, așa cum se constată considerând șiruri $\left(\left(\frac{\lambda}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu λ

parametru real.

3.1.4. Funcții reale de mai multe variabile continue într-un punct.

Definiția 3.1.4.1. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A \cap A'.$ Funcția f se numește *continuă în punctul a* dacă există

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Dacă funcția f nu este continuă în punctul a , spunem că f este discontinuă în acest punct.

Folosind definiția 3.1.3.2. a limitei unei funcții într-un punct, precum și teorema 3.1.3.2. pentru $l = f(a)$ rezultă imediat:

Teorema 3.1.4.1. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A \cap A'.$ Următoarele afirmații sunt echivalente:

- f este continuă în punctul a ;
- pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in U \cap A$ avem $f(x) \in V$;
- pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- pentru orice șir $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ de elemente din mulțimea A cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

Ținând seama de observația 3.1.3.2. obținem:

Observația 3.1.4.1. a) Dacă $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a \in A \cap A'$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$ avem $|f(x) - f(a)| \leq g(x)$ și dacă $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ atunci, evident, f este continuă în punctul a .

b) Dacă $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, a = (a^1, a^2, \dots, a^p) \in A \cap A', f$ este continuă în punctul a dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in A$ cu $|x^i - a^i| < \delta, i = 1, 2, \dots, p$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

c) Dacă există un șir $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ de elemente din A cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(a)$ atunci, evident,

funcția f nu este continuă în punctul a .

Folosind noțiunea de limită după o direcție introdusă în definiția 3.1.3.3. obținem:

Definiția 3.1.4.2. Funcția $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este *continuă în punctul* $a \in A \cap A'$ după direcția vectorului $v \neq 0$ dacă $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv) = f(a)$.

În particular, dacă vectorul v are toate componentele nule, cu excepția componentei a i -a și funcția f este continuă după direcția lui v în punctul a , spunem că f este *continuă parțial în raport cu variabila* x^i în punctul a . Evident, i poate lua oricare dintre valorile $1, 2, \dots, p$. Având în vedere observația 3.1.3.3. b) rezultă că dacă f este continuă în punctul a atunci ea este continuă după orice direcție în acest punct; în particular, ea este continuă parțial în raport cu fiecare variabilă x^1, x^2, \dots, x^p separat în punctul a , reciproca nefiind, în general, adevărată.

3.1.5. Funcții vectoriale de variabilă vectorială continue într-un punct.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \geq 2$, $m \geq 2$. O asemenea funcție se numește *funcție vectorială de variabilă vectorială* sau funcție vectorială de p variabile reale, deoarece pentru orice $x \in A$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ cu $x^i \in \mathbb{R}$,

$i = 1, 2, \dots, p$, $f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^p) = y = (y^1, y^2, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$.

Funcțiile $f_k: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = y^k$, $k = 1, 2, \dots, m$ sunt, evident, funcții reale de p variabile reale și se numesc *componentele funcției* f .

Considerând pe \mathbb{R}^p și \mathbb{R}^m metrica euclidiană, dacă $a \in A'$ și $l = (l^1, l^2, \dots, l^m) \in \mathbb{R}^m$, prin analogie cu definiția 3.1.3.2. putem enunța:

Definiția 3.1.5.1. Elementul l se numește *limita funcției* f în punctul a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$.

Se poate demonstra:

Teorema 3.1.5.1. Elementul l este limita funcției f în punctul a dacă și numai dacă oricare ar fi șirul de elemente din $A \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Ținând seama de teorema 3.1.2.1. referitoare la limita unui șir convergent din \mathbb{R}^m , deducem imediat:

Teorema 3.1.5.2. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ are limită în punctul $a \in A'$ dacă și numai dacă toate componentele sale au limită în acest punct. Trecerea la limită se face pe componente, adică

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_m(x)).$$

Studiul funcției f se reduce la studiul celor m componente ale sale care sunt funcții reale de p variabile reale.

Prin analogie cu definiția 3.1.4.1. putem enunța:

Definiția 3.1.5.2. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \geq 2$, $m \geq 2$, $a \in A \cap A'$. Funcția f se numește *continuă în punctul* a dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ținând seama de teorema 3.1.6.2. rezultă imediat:

Teorema 3.1.5.3. Funcția vectorială $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a \in A \cap A'$ dacă și numai dacă toate componentele sale sunt continue în acest punct.

3 FUNCȚII CONTINUE

3.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 3.2.1. Studiați convergența următoarelor șiruri din \mathbb{R}^3 .

$$\text{a) } x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{b) } x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{c) } x_n = \left(\frac{1}{2+n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n} \right)$$

Soluții.

a) Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ deducem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent

și limita sa este $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right)$.

b) Analog se obține

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos \frac{1}{n} \right) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{-n}), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= (1, 0, 1) \end{aligned}$$

c) Deoarece a doua componentă a șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir divergent rezultă că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent.

Exercițiul 3.2.2. Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

Soluții.

a) Deoarece $\frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ rezultă că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \cdot 0 = 0$.

$$\text{b) } \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}}{x^2 + y^2} = 2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4},$$

$(x, y) \neq (0, 0)$.

Deoarece $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = 0$ și $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ deducem că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$.

Exercițiul 3.2.3. Să se demonstreze că următoarele funcții nu au limită în $(0, 0)$.

$$a) f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, x + y \neq 0$$

$$b) f(x, y) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot y}{e^{\frac{2}{x^2}} + y^2}, x \neq 0$$

Soluție.

a) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din \mathbb{R}^2 , $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{\lambda}{n}$ unde $\lambda \neq -1$ este un parametru real.

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, $f(x_n, y_n) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$ depinde de parametrul λ . Prin urmare, funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

b) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din \mathbb{R}^2 , astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $y_n = \lambda \cdot e^{\frac{1}{x_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$ unde λ este un parametru real.

Atunci, evident $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$f(x_n, y_n) = \frac{\lambda \cdot e^{\frac{2}{x_n^2}}}{e^{\frac{2}{x_n^2}} + \lambda^2 e^{\frac{2}{x_n^2}}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ depinde de parametrul λ . Rezultă că funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.4. Să se demonstreze că următoarele funcții sunt continue în $(0, 0)$.

$$a) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right), & y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0, & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluție.

a) Prin înlocuire directă obținem: $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ deci f este continuă în $(0, 0)$.

b) Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = (x^2 + y^2) \cdot \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq x^2 + y^2$$

și, evident, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$. Ținând seama de observația 3.1.4.1. a) rezultă că funcția f este continuă în $(0, 0)$.

c) Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$, avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) \leq y^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) = x^2 + y^2$$

de unde, ca mai sus, deducem că f este continuă în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.5. Să se demonstreze că următoarele funcții nu sunt continue în $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Soluție.

a) Funcția f nu are limită în $(0, 0)$ deci nu este continuă în $(0, 0)$.

b) Considerăm șirul $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent către $(0, 0)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, avem $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$

$$\frac{1}{n^5} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2n^3}.$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0 \neq f(0, 0)$. Ținând seama de observația 3.1.4.1. c) deducem că f nu este continuă în

$(0, 0)$. (Se poate arăta că această funcție are limită în $(0, 0)$ dar aceasta nu este 1).

Exercițiul 3.2.6. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$\begin{aligned} \text{a) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{b) } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) &= \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ a, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Soluții.

a) Deoarece $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0$ rezultă că f este continuă în $(0, 0)$ dacă și numai dacă $a = 0$.

Cum f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fiind compunere de funcții continue rezultă că dacă $a = 0$ funcția f este continuă pe \mathbb{R}^2 iar dacă $a \neq 0$, ea este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Pentru orice $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ avem:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{-x^2 - y^2 - z^2}{(1 + \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2})(x^2 + y^2 + z^2)} = \\ &= - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

$$\text{deci } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = - \frac{1}{2}$$

Cum pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ funcția este evident continuă, deducem că pentru $a = -\frac{1}{2}$ funcția este continuă pe \mathbb{R}^3 iar pentru $a \neq -\frac{1}{2}$ ea este continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exercițiul 3.2.7. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + |y|^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Să se demonstreze că funcția f este

continuă după orice direcție în origine, dar f nu este continuă în origine.

Soluție.

Fie (d) o dreaptă ce trece prin origine, de ecuație $y = mx, m \in \mathbb{R}, m \neq 0$. Restricția funcției f la dreapta (d) este funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x, mx) = \begin{cases} \frac{m |x|}{|x|^3 + |m|^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ rezultă că g este continuă.

Dacă $m = 0$ dreapta (d) reprezintă axa Ox . În acest caz $g(x) = f(x, 0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este evident continuă în acest caz. În sfârșit, dacă (d) este axa Oy restricția va fi $h(y) = f(0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deci este continuă. Prin urmare, restricția lui f la orice dreaptă ce trece prin origine este continuă în origine.

Considerăm acum șirul de puncte din $\mathbb{R}^2, \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ care converge la $(0, 0)$ și observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} = \infty, \text{ deci } f \text{ nu este continuă în } (0, 0).$$

Exercițiul 3.2.8. Să se arate că funcția $f(x) = xa^x - I, a > 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Soluție.

Funcția f este continuă pe \mathbb{R} ca funcție elementară, deci are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} . Cum $f(1) = a - 1 > 0$ și $f(0) = -1 < 0$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

Exercițiul 3.2.9. Stabiliți dacă următoarele funcții au limită în $x = 0$.

$$a) f: (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \frac{e^{3x} - 1}{2x}, \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x} - 1)} \right)$$

$$b) f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}, \frac{\sin x}{x}, \sin \frac{1}{x} \right)$$

Soluții. a) Fie $f_1(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. În $x = 0$ suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

Deoarece
$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \text{ pentru orice } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

deducem că $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1$. Notând $f_2(x) = \frac{e^{3x} - 1}{2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, și încercând să calculăm $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$

constatăm că suntem din nou în cazul $\frac{0}{0}$.

Vom utiliza următoarea egalitate importantă: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Deoarece $f_2(x) = \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{2}$ pentru orice $x \neq 0$ deducem imediat că $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \frac{3}{2}$.

Fie acum $f_3(x) = \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$, $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$. În $x = 0$ suntem, din nou, în cazul $\frac{0}{0}$. Deoarece

pentru orice $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ avem

$$f_3(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x(\sqrt{1+x} - 1)} = \frac{2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right) (\sqrt{1+x} + 1)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 (\sqrt{1+x} + 1)$$

deducem că $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Deoarece $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ pentru orice $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ și toate componentele f_1, f_2, f_3 au limită în $x = 0$, deducem că f are limită în

$$x = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x), \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) \right) = \left(1, \frac{3}{2}, 1 \right).$$

b) Analog, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$f_3(x) = \sin \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Evident $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1$. Componenta f_3 nu are

limită în $x = 0$ (este suficient să considerăm $a_n = \frac{1}{n\pi}$ și $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și să observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ dar } \lim_{n \rightarrow \infty} f_3(a_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_3(b_n).$$

Deoarece una dintre componente nu are limită în $x = 0$, deducem că funcția f nu are limită în $x = 0$.

Exercițiul 3.2.10. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \text{ nu are limită în } (0, 0).$$

Soluție. Fie $f_1(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ și $f_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pentru

$(x, y) \neq (0, 0)$ componentele funcției vectoriale f . Deoarece pentru orice

$(x, y) \neq (0, 0)$ avem $|f_1(x, y)| \leq \frac{x^2 |y^3|}{x^2} = |y^3|$ dacă $x \neq 0$ și $f_1(0, y) = \frac{0}{y^2}$ dacă $y \neq 0$ iar $\lim_{y \rightarrow 0} |y^3| = 0$

rezultă că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$.

Deoarece $f_2(x, kx) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ pentru orice $x \neq 0$ rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x, kx) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ care depinde de k și funcția f_2 nu are limită în $(0, 0)$. Deducem de aici că funcția vectorială f nu are limită în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.11. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin 5x}{x}, \frac{1 - \cos x}{x^2}, \frac{e^x - 1}{x} \right), & x \neq 0 \\ \left(5, \frac{1}{2}, 1 \right), & x = 0 \end{cases}$$

Soluție. Fiecare componentă a funcției f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(5, \frac{1}{2}, 1 \right) = f(0)$, deci f este continuă și în $x = 0$. Prin urmare f este continuă pe \mathbb{R} .

Exercițiul 3.2.12. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, (1 + |xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}}, \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ (a, b, c) & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

să fie continuă pe \mathbb{R}^2 .

Soluție. Funcția vectorială f este continuă pe \mathbb{R}^2 dacă și numai dacă fiecare componentă a sa este continuă pe \mathbb{R}^2 .

Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ cele trei componente sunt continue fiind compuneri de funcții continue. Pentru a studia continuitatea funcției vectoriale f în $(0, 0)$ determinăm limita în $(0, 0)$ a fiecărei componente.

Deoarece $f_1(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)(1 + \sqrt{1 + x^2 + y^2})}$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ rezultă

că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = -\frac{1}{2}$.

$$f_2(x, y) = (1 + |xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}} = \left[(1 + |xy|)^{\frac{1}{|xy|}} \right]^{\frac{|xy|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}}$$

Dar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + |xy|)^{\frac{1}{|xy|}} = e$ și $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} = 0$.

Prin urmare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = e^0 = 1$.

Avem și $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_3(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} =$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 \sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \frac{x^2 + y^2}{2}}{\frac{x^2 + y^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Prin urmare, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$. Cum $f(0, 0) = (a, b, c)$ rezultă că f este continuă în $(0,0)$ dacă

și numai dacă $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$.

3 FUNCTII CONTINUE

3.3. Exerciții propuse

Exercițiul 3.3.1. Studiați convergența următoarelor șiruri din \mathbb{R}^3 :

a) $x_n = \left(\frac{2n}{3n+1}, \frac{n}{n+1}, \frac{1}{n^2} \right)$

b) $x_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right)$

c) $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n}{n}, \frac{1}{n} \sin n \right)$

d) $x_n = \left(\sin \frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right)$

e) $x_n = \left(\frac{1 + (-1)^n}{n}, (1 + (-1)^n), \frac{1}{n} \right)$

R. a) convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right)$, b) convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (e, 1, 0)$,

c) convergent $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(\frac{1}{e}, 0, 0 \right)$, d) divergent, e) divergent.

Exercițiul 3.3.2. Să se demonstreze că:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 y^3}{(x-1)^2 + y^2} = 0$ d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) = 0$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y) \operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$ f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2$ h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{xy} = 1$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$ j) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (1 + xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}} = 1$

Exercițiul 3.3.3. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele indicate:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ în $(0, 0)$ b) $f(x, y) = \frac{1}{x+y} \left(x \sin \frac{1}{x} + y \right)$ în $(0, 0)$

c) $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x \cdot y}$ în $(0, 0)$ d) $f(x, y) = \frac{x - y - 1}{x + y - 1}$ în $(1, 0)$

e) $f(x, y) = \frac{xy + x - y - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}$ în $(1, -1)$;

$$f) f(x, y) = \frac{y^2 + 2x - a}{y^2 - 2x + a} \ln \left(\frac{a}{2}, 0 \right).$$

Exercițiul 3.3.4. Să se studieze dacă următoarele funcții au limită în origine:

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$b) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$c) f(x, y, z) = \frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d) f(x, y) = (2x + y) \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

R. a) nu, b) nu, c) nu, d) da.

Exercițiul 3.3.5. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right), & y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x - y} e^{-\frac{1}{x-y}}, & x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

$$f) f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$g) f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\ln(x^2 + y^2)}, & 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } f(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & x^2 < y \\ 0, & x = y = 0 \\ \frac{y^2 - x^2 y}{x^2}, & 0 < y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\text{j) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 2(y - x^2)}{y - x^2}, & y - x^2 < 0 \\ 2, & x^2 = y \\ 2 - \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & y - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{k) } f(x, y, z) = \begin{cases} (1 - x - 2z) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, & x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\text{l) } f(x, y, z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}, & x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 3, & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

R. a) continuă pe \mathbb{R}^2 ; b) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; c) continuă pe \mathbb{R}^2 ; d) continuă pe \mathbb{R}^2 ; e) continuă pe \mathbb{R}^2 ; f) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, b), b \neq 0\}$; g) continuă pe \mathbb{R}^2 ; h) continuă; i) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; j) continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a^2), a \neq 0\}$; k) continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;

l) continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;

Exercițiul 3.3.6. Să se arate că funcția $f(x) = x^5 - 2x - 1$ se anulează cel puțin o dată între $x = 1$ și $x = 2$.

Exercițiul 3.3.7. Să se studieze dacă următoarele funcții vectoriale au limită în origine:

$$\text{a) } f(x, y) = \left(\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^4}, \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{b) } f(x, y, z) = \left(e^{\frac{1}{x+y+z}}, \frac{x+z}{x+y+z} \right)$$

R. a) da, b) nu

Exercițiul 3.3.8. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}, \frac{1-\cos x}{x^2} \right), & x \neq 0 \\ \left(1, \frac{1}{2} \right), & x = 0 \end{cases}$$

R. continuă pe \mathbb{R} .

Exercițiul 3.3.9. Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

R. continuă pe \mathbb{R}^2

4. FUNCȚII DIFERENȚIABILE. EXTREME LOCALE.

4.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale.

4.1.1. Diferențiabilitatea funcțiilor reale de o variabilă reală.

Multe probleme concrete conduc la evaluarea aproximativă a creșterii unei anumite mărimi în raport cu creșterea alteia. Pentru simplitatea ei este preferată aproximarea liniară.

Fiind dată o funcție $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ și un punct fixat $x_0 \in (a, b)$ se caută o funcție liniară L_{x_0} astfel încât creșterea funcției f în punctul x_0 , relativă la creșterea h a argumentului, să poată fi aproximată cu $L_{x_0}(h)$, adică:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx L_{x_0}(h)$$

pentru h suficient de mic. Pentru ca o asemenea formulă aproximativă să poată fi acceptată este necesar ca:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

ceea ce asigură că eroarea în formula de aproximare poate fi făcută oricât de mică pentru variații din ce în ce mai mici ale argumentului.

Apar în mod natural o serie de probleme, cum ar fi: existența și unicitatea aplicației liniare L_{x_0} , precum și caracterizarea funcțiilor f pentru care pot fi considerate asemenea aproximări liniare.

Din liceu se știe că pentru o funcție $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$, poate fi considerată formula de aproximare:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h$$

pentru h suficient de mic.

Aceste considerații conduc, în mod natural, la următoarea definiție:

Definiția 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcția f se numește *diferențiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicație liniară $L_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Observația 4.1.1.1. a) Orice funcție liniară $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma

$L(x) = c \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $c = L(1)$; reciproc, oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$, fixat, egalitatea $L(x) = c \cdot x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definește o funcție liniară $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prin urmare, orice aplicație liniară de la \mathbb{R} la \mathbb{R} este bine determinată de o constantă reală. Deducem astfel că funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă există $c_{x_0} \in \mathbb{R}$, încât:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - c_{x_0} \cdot h}{h} = 0$$

b) Egalitatea $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$ poate fi scrisă echivalent:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Ultima egalitate prezintă avantajul că poate fi ușor transcrisă pentru funcții de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R}^m înlocuind modulul din \mathbb{R} cu norma din \mathbb{R}^p , respectiv din \mathbb{R}^m .

Teorema următoare stabilește faptul că o funcție reală de o variabilă reală este diferențiabilă într-un punct fixat x_0 dacă și numai dacă ea este derivabilă în acest punct.

Teorema 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Dacă f este diferențiabilă în x_0 , atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = L_{x_0}(1)$. Dacă f este derivabilă în x_0 , atunci f este diferențiabilă în x_0 și $L_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$.

Observația 4.1.1.2. Din această teoremă se deduce imediat că aplicația liniară L_{x_0} din definiția 4.1.1.1. este unic determinată de f și x_0 .

Definiția 4.1.1.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul fixat $x_0 \in A$, aplicația liniară L_{x_0} se numește *diferențiala funcției f în punctul x_0* și se notează df_{x_0} . Funcția f se numește *diferențiabilă pe mulțimea A* dacă este diferențiabilă în fiecare punct $x \in A$. În acest caz, notând prin $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mulțimea tuturor aplicațiilor liniare de la \mathbb{R} la \mathbb{R} , funcția $df : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definită prin $(df)(x) = df_x$ se numește *diferențiala funcției f pe mulțimea A* .

Observația 4.1.1.3. a) Cunoașterea funcției $df : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ revine la cunoașterea funcției $df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pentru orice $x \in A$. Din teorema 4.1.1.1. deducem că pentru orice $x \in A$ și orice $h \in \mathbb{R}$ avem:

$$(df)(x)(h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

b) Funcția identitate pe A , $I_A : A \rightarrow A$, $I_A(x) = x$ este diferențiabilă pe A și diferențiala sa, notată cu dx , este egală, în fiecare punct $x \in A$, cu funcția identitate pe \mathbb{R} . Prin urmare, $dx : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ și $(dx)(x) = I_{\mathbb{R}}$ pentru orice $x \in A$, adică, oricare ar fi $x \in A$ și oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$, $(dx)(x)(h) = h$.

c) Cu ajutorul diferențialei funcției identitate pe A putem exprima diferențiala funcției f diferențiabile pe A , astfel:

$$df = f' \cdot dx$$

Este evident că studiul funcțiilor reale de o variabilă reală, diferențiabile se reduce la studiul funcțiilor derivabile, cunoscut din liceu.

4.1.2. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de o variabilă reală.

Ținând seama de observația 4.1.1.1. b), definiția 4.1.1.1. se poate exprima astfel:

Definiția 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială de o variabilă reală arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcția f se numește *diferențiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicație liniară

$L_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)\|}{|h|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din \mathbb{R}^m , $m \geq 2$)

Ținând seama de faptul că, în \mathbb{R}^m , operațiile algebrice și trecerea la limită se fac pe componente, rezultă imediat:

Teorema 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială de o variabilă reală, de componente $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ $k = 1, 2, \dots, m$, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în x_0 . Ținând seama de teorema 4.1.1.1. și de faptul că $L_{x_0}(h) = (c_1 h, c_2 h, \dots, c_m h)$, unde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ se obține $L_{x_0}(h) = (f'_1(x_0) \cdot h, f'_2(x_0) \cdot h, \dots, f'_m(x_0) \cdot h) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_m(x_0)) \cdot h$.

Prin urmare, și în acest caz, aplicația liniară L_{x_0} din definiție este bine determinată de funcția f și punctul x_0 , mai exact de vectorul $(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_m(x_0))$ unic determinat de f și x_0 .

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} și o vom numi *diferențiala funcției f în punctul x_0* ; vom nota:

$$(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_m(x_0)) = f'(x_0)$$

și vom numi acest vector *derivata funcției vectoriale f în punctul x_0* . Atunci, evident $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$ pentru orice $h \in \mathbb{R}$.

Să reținem deci că derivarea și diferențierea unei funcții vectoriale de o variabilă reală se realizează ca și trecerea la limită sau studiul continuității, pe componente.

4.1.3. Derivate parțiale. Diferențiabilitatea funcțiilor reale de variabilă vectorială. Extreme locale.

Considerăm \mathbb{R}^p înzestrat cu norma euclidiană, $p \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulțime deschisă.

Ținând seama de observația 4.1.1.1. b), definiția 4.1.1.1. se extinde astfel:

Definiția 4.1.3.1. Funcția $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă în punctul* $x_0 \in A$ dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0$$

(la numitor se consideră norma euclidiană din \mathbb{R}^p , $p \geq 2$)

Observația 4.1.3.1. Deoarece aplicația L_{x_0} este liniară, pentru orice

$h \in \mathbb{R}^p$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ avem: $L_{x_0}(h) = c_1^0 h_1 + c_2^0 h_2 + \dots + c_p^0 h_p$, unde $c_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$.

În ideea de a stabili legătura între numerele $c_1^0, c_2^0, \dots, c_p^0$ și funcția f , se poate arăta că, dacă f este diferențiabilă în x_0 , deci aplicația L_{x_0} există,

$$c_i^0 = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \dots, x_p^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

Prin urmare, și în acest caz, aplicația liniară L_{x_0} din definiție este unic determinată de funcția f și punctul x_0 .

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} și o vom numi *diferențiala funcției f în punctul x_0* .

Limita de mai sus se numește *derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul x_0* și se

notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, \dots, x_p^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_p^0)}{h_i}$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

Rezultă astfel:

Teorema 4.1.3.1. Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 atunci f are derivate parțiale în acest punct în raport cu toate variabilele și:

$$df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot h_p$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$.

Observația 4.1.3.2. a) Rolul derivatei de la funcții de o variabilă îl joacă vectorul

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \right)$ care se numește *gradientul funcției f în punctul x_0* și se notează $(grad f)(x_0)$.

Evident, $df_{x_0}(h) = (grad f)(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

b) Dacă f are derivate parțiale în x_0 , în raport cu toate variabilele nu rezultă, în general, că f este diferențiabilă în x_0 . De exemplu, dacă $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar f nu este diferențiabilă în

$(0, 0)$. Dacă f ar fi diferențiabilă în $(0, 0)$ ținând seama de teorema precedentă, $L_{(0, 0)}(h) = 0$ pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

$$\text{Raportul } \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - L_{(0,0)}(h_1, h_2)|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \text{ nu are \u00eens\u0103 limita zero c\u00e2nd } \|h\| \rightarrow 0,$$

deci f nu este diferen\u021biabil\u0103 \u00een $(0, 0)$.

c) Fie $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ arbitrar, fixat. Fie $\Pi_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\Pi_i(x_1, x_2, \dots, x_p) = x_i$ aplica\u021bia de proiec\u021bie. Oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}^p$, Π_i este diferen\u021biabil\u0103 \u00een x_0 \u0219i

$(d\Pi_i)_{x_0} = \Pi_i$. De obicei se noteaz\u0103 $d\Pi_i$ cu dx_i . Astfel, $(dx_i)_{x_0}(h_1, h_2, \dots, h_p) = \Pi_i(h_1, h_2, \dots, h_p) = h_i$. Cu ajutorul diferen\u021bi\u0103lelor aplica\u021biilor de proiec\u021bie, diferen\u021b\u0103la unei func\u021bii diferen\u021biabile arbitrare se exprim\u0103 astfel:

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot (dx_1)_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot (dx_2)_{x_0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot (dx_p)_{x_0}$$

aceasta fiind o egalitate de aplica\u021bii din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Dac\u0103 f este diferen\u021biabil\u0103 \u00een orice punct din A , atunci, evident, ob\u021binem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p$$

aceasta fiind o egalitate de aplica\u021bii definite pe A cu valori \u00een $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, unde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este func\u021bia care

asociaz\u0103 fiec\u0103rui punct din A num\u0103rul real care este derivata par\u021bial\u0103 a func\u021biei f \u00een raport cu variabila x_i \u00een acest punct.

Defini\u021bia 4.1.3.2. Func\u021bia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se nume\u0219te *derivabil\u0103 par\u021bial pe mul\u021bimea A* dac\u0103 are derivate par\u021biale \u00een raport cu toate variabilele sale \u00een orice punct din A . \u00c\n acest caz se pot defini p func\u021bii $\frac{\partial f}{\partial x_i} :$

$A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = 1, 2, \dots, p$ numite *derivatele par\u021biale* ale lui f pe mul\u021bimea A . Func\u021bia f este de clas\u0103

C^l pe A \u0219i se noteaz\u0103 $f \in C^l(A)$ dac\u0103 f este derivabil\u0103 par\u021bial pe A \u0219i func\u021biile $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, p$ sunt

continue pe A .

Teorema 4.1.3.2. Dac\u0103 func\u021bia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabil\u0103 par\u021bial pe o vecin\u0103tate deschis\u0103 V a punctului $x_0 \in A$, iar func\u021biile $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, p$ sunt continue \u00een x_0 , atunci func\u021bia f este

diferen\u021biabil\u0103 \u00een x_0 .

Dac\u0103 $f \in C^l(A)$ atunci f este diferen\u021biabil\u0103 pe A .

Observa\u021bia 4.1.3.3. Continuitatea derivatelor par\u021biale \u00een x_0 este o condi\u021bie suficient\u0103 pentru diferen\u021biabilitatea func\u021biei f \u00een acest punct, dar nu neap\u0103rat necesar\u0103. De exemplu, func\u021bia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este diferen\u021biabil\u0103 \u00een origine f\u0103r\u0103 ca derivatele sale par\u021biale s\u0103 fie continue \u00een acest punct (vezi exerci\u021biul 4.3.4.).

Defini\u021bia 4.1.3.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submul\u021bime deschis\u0103, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A$ \u0219i fie $v = (v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ un versor dat

$(\|v\| = 1)$. Func\u021bia f se nume\u0219te *derivabil\u0103 \u00een punctul x_0 dup\u0103 versorul v* dac\u0103 exist\u0103 \u00een \mathbb{R}

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$. Not\u0103m aceast\u0103 limit\u0103 cu $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ \u0219i o numim *derivata func\u021biei f dup\u0103 versorul*

v \u00een punctul x_0 .

Observația 4.1.3.4. a) Notând $x = x_0 + tv$ rezultă că vectorul $x - x_0$ este coliniar cu v , iar t este abscisa punctului x pe dreapta determinată de x_0 și v , orientată cu ajutorul lui v . Cu această notație, putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x - x_0 = tv}} \frac{f(x) - f(x_0)}{t}$$

ceea ce justifică terminologia utilizată.

b) Notând cu $v^* = -v$ (versorul opus) se observă imediat că dacă există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial v^*}(x_0) = -$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$; acest fapt justifică de ce derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ este asociată versorului și nu direcției (care admite doi versori)

c) Dacă $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ este baza canonică a lui \mathbb{R}^p , atunci derivata funcției f după versorul e_k este tocmai derivata parțială în raport cu variabila x_k , adică

$$\frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0), k = 1, 2, \dots, p$$

Prin urmare, derivatele parțiale ale unei funcții într-un punct sunt cazuri particulare de derivate după versori în acel punct.

Teorema 4.1.3.3. Dacă funcția f este diferențiabilă în x_0 , atunci există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ pentru orice versor $v \in \mathbb{R}^p$

și $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$.

Ținând seama de teorema 4.1.3.1. deducem că:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (grad f)(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot v_p$$

Deci, dacă f este diferențiabilă în x_0 , atunci ea are derivată după orice versor în x_0 și aceasta se poate exprima cu ajutorul derivatelor parțiale în acest punct.

Definiția 4.1.3.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulțime deschisă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial în raport cu

variabila x_k pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in A$. Dacă funcția $\frac{\partial f}{\partial x_k}: V \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în

raport cu variabila $x_j, j \neq k$ în punctul x_0 , atunci f se numește *de două ori derivabilă parțial* în punctul x_0 , în

raport cu variabilele x_j și x_k , iar $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$ și se numește *derivata parțială*

mixtă de ordinul doi a funcției f în punctul x_0 în raport cu variabilele x_j și x_k . Dacă $j = k$, în condițiile de mai sus, funcția se numește de două ori derivabilă parțial în punctul x_0 , în raport cu variabila x_k , iar

$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)$ și se numește *derivata parțială de ordinul doi a funcției f în*

punctul x_0 în raport cu variabila x_k .

Dacă funcția f este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele x_j și x_k în fiecare punct din A , spunem că f este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele x_j și x_k pe A , iar aplicația

$x \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ se numește *derivata parțială de ordinul doi a funcției f în raport cu variabilele x_j și x_k* .

Evident, j și k pot lua oricare din valorile $1, 2, \dots, p$ deci, pentru o funcție de p variabile, se pot defini p^2 derivate parțiale de ordinul doi, dintre care $p^2 - p$ sunt mixte.

Funcția f se numește *de clasă C^2* pe mulțimea A , dacă toate derivatele parțiale de ordinul doi există și sunt continue pe A .

Observația 4.1.3.5. Pentru funcții de două variabile există patru derivate parțiale de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pentru unele funcții derivatele mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt egale. În schimb, pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{avem:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1. \text{ (vezi exercițiul 4.3.10.)}$$

Deci, în acest caz, derivatele parțiale mixte în $(0, 0)$ nu sunt egale. Teorema următoare dă condiții suficiente pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte.

Teorema 4.1.3.4. (H.A. Schwarz) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă,

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ o funcție de clasă } C^2 \text{ pe } A. \text{ Atunci } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$j, k = 1, 2, \dots, p.$$

Observația 4.1.3.6. Continuitatea derivatelor mixte este o condiție suficientă, dar nu neapărat necesară,

$$\text{pentru egalitatea acestora. De exemplu, pentru funcția } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right), & y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} \text{ avem}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \text{ dar funcția } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ nu este continuă în origine. (vezi exercițiul 4.3.11.)}$$

Definiția 4.1.3.5. Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) \right)$, $j, k = 1, 2, \dots, p$ se numește *hessiana funcției f în punctul* x_0 .

În cazul în care f este de clasă C^2 matricea $H_f(x_0)$ este o matrice simetrică. În acest caz, forma pătratică determinată de această matrice, adică aplicația $\varphi_{x_0}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$

joacă un rol foarte important în determinarea punctelor de extrem local pentru o funcție reală de mai multe variabile reale.

Definiție 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct de extrem local al funcției f* dacă există o vecinătate V a punctului x_0 în care diferența $f(x) - f(x_0)$ are semn constant. Mai precis, punctul x_0 se numește *punct de maxim* (respectiv de *minim*) *local* al lui f dacă pentru orice $x \in V$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$). Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct critic* (sau *staționar*) pentru funcția f , dacă f are derivate parțiale de ordinul întâi nule în x_0 , adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, i = 1, 2, \dots, p.$$

Teorema următoare stabilește condiții necesare de extrem.

Teorema 4.1.3.5. (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă. Dacă funcția

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul întâi în punctul $x_0 \in A$ și x_0 este punct de extrem local al lui f , atunci x_0 este punct critic (staționar) pentru f .

Observația 4.1.3.7. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă parțial în raport cu toate variabilele pe mulțimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ atunci punctele de extrem local ale funcției f se află printre soluțiile situate în A ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Nu orice soluție a acestui sistem este un punct de extrem. De exemplu, pentru funcția $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, singurul punct critic este $(0, 0)$, dar $f(x, y) - f(0, 0)$ nu păstrează un semn constant în nici o vecinătate a originii. Prin urmare, $(0, 0)$ este punct critic, dar nu este punct de extrem pentru f .

În cele ce urmează, în cazul în care f este de clasă C^2 vom da condiții suficiente prin utilizarea cărora să se poată decide care din punctele critice ale unei funcții sunt puncte de extrem.

Teorema 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă și convexă, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe A . Fie $x_0 \in A$ un punct critic al funcției f și φ_{x_0} forma pătratică determinată de matricea hessiană $H_f(x_0)$. Dacă forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (negativ definită) atunci x_0 este punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f .

În demonstrația acestei teoreme este foarte utilă formula lui Taylor cu restul de ordinul doi:

Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , iar $x_0 \in A$ este un punct fixat, atunci, pentru orice $x \in A$ există ξ pe segmentul $[x_0, x]$ astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Observația 4.1.3.8. a) Dacă f este de clasă C^2 pe A , matricea hessiană în orice punct este o matrice simetrică, deci toate valorile ei proprii sunt reale. Dacă $H_f(x_0)$ are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv strict negative) atunci forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (respectiv negativ definită) și deci x_0 este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f .

b) Condițiile lui Sylvester din teoria formelor pătratice aplicate formei φ_{x_0} de mai sus arată că x_0 este punct de minim dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ ai matricii hessiene sunt strict pozitivi; x_0 este punct de maxim dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^p \Delta_p > 0$.

c) Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ atunci se studiază semnul creșterii $f(x) - f(x_0)$ direct

sau cu ajutorul formulei lui Taylor scrisă corespunzător (dacă f este de clasă C^n , $n \geq 3$).

4.1.4. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială. Matricea jacobiană.

Ținând seama de observația 4.1.1.1. b), definiția 4.1.1.1. se poate extinde astfel:

Definiția 4.1.4.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă, $p \geq 2, f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$m \geq 2$ o funcție vectorială de variabilă vectorială arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcția f se numește *diferențiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicație liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)\|}{\|h\|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din \mathbb{R}^m , iar la numitor, norma euclidiană din \mathbb{R}^p)

Ținând seama de faptul că în \mathbb{R}^m operațiile algebrice și trecerea la limită se face pe componente, rezultă ca și în cazul 4.1.2. :

Teorema 4.1.4.1. Funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în x_0 .

În acest caz L_{x_0} are drept componente diferențialele $df_{1x_0}, df_{2x_0}, \dots, df_{mx_0}$ ale componentelor lui f , care sunt aplicații liniare de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R} , exprimate cu ajutorul derivatelor parțiale ca în

teorema 4.1.3.1. Prin urmare, și în acest caz, aplicația liniară L_{x_0} din definiția 4.1.4.1. este bine determinată de funcția f și punctul x_0 , mai precis de matricea:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

numită matrice Jacobi (sau matrice jacobiană) a funcției f în punctul x_0 , notată $J_f(x_0)$.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} și o vom numi *diferențiala funcției f în punctul x_0* . Atunci evident, $df_{x_0}(h) = J_f(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

Dacă $m = p$ matricea Jacobi este o matrice pătrată, iar determinantul ei poartă numele de *jacobian* sau *determinant funcțional* al aplicației f în punctul x_0 și se notează

$$\det J_f(x_0) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(x_0)$$

Referitor la funcțiile compuse se poate demonstra:

Teorema 4.1.4.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțimi deschise, $f: A \rightarrow B$ o funcție diferențiabilă în punctul $x_0 \in A$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă în punctul $f(x_0) \in B$. Atunci funcția compusă $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în punctul x_0 și :

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$

Observația 4.1.4.1. a) Din această egalitate rezultă diverse reguli de derivare parțială a funcțiilor compuse. De exemplu, dacă $p = n = 2$, $m = 1$, funcția f este de variabile x și y , iar g este de variabile u , v , ambele diferențiabile, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x, y), f_2(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

b) Dacă $p = n = m$ se obține o relație importantă între determinanții funcționali și anume:

$$\det[J_{g \circ f}(x_0)] = \det[J_g(f(x_0))] \cdot \det[J_f(x_0)]$$

4. FUNCȚII DIFERENȚIABILE. EXTREME LOCALE.

4.2. Exerciții rezolvate.

Exercițiul 4.2.1. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ este diferențiable pe } \mathbb{R} \text{ și să se determine diferențiala sa.}$$

Soluție. Funcția f este evident, derivabilă în orice $x \neq 0$, $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ dacă $x < 0$ și $f'(x) = 2x$ dacă $x > 0$. Deoarece f este continuă în $x = 0$ aplicând o consecință a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f'_s(0) = \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = 0$ și $f'_d(0) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ și $f'(0) = 0$.

Prin urmare f este derivabilă pe \mathbb{R} , deci este diferențiable pe \mathbb{R} , iar diferențiala sa este funcția $df: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcția liniară și continuă

$$df_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, df_x(h) = f'(x) \cdot h = \begin{cases} h \cdot \sin 2x, & x < 0 \\ 2x \cdot h, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Exercițiul 4.2.2. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \text{ unde } f_1(x) = \sin x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}, f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este diferențiable pe \mathbb{R} și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Demonstrăm că funcțiile f_1, f_2, f_3 sunt diferențiable pe \mathbb{R} .

Evident, f_1 este derivabilă pe \mathbb{R} , deci este și diferențiable, iar diferențiala sa este $df_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $df_{1x}(h) = f'_1(x) \cdot h = h \cdot \cos x$.

Funcția f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și

$$f'_2(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ x(2-x)e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Deoarece $\lim_{x \uparrow 0} f'_2(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'_2(x) = 0$ și f este continuă în 0 , deducem că f este derivabilă în 0 și $f'_2(0) = 0$. Prin urmare, f_2 este derivabilă pe \mathbb{R} , deci este și diferențiable pe \mathbb{R} și diferențiala sa este funcția $df_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcția

$$df_{2x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, df_{2x}(h) = \begin{cases} -2xh, & x \leq 0 \\ x(2-x)e^{-x}h, & x > 0 \end{cases}$$

Componenta f_3 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dar nu se poate aplica consecința teoremei lui Lagrange pentru studiul derivabilității în $x = 0$ deoarece derivata f'_3 nu are limită în $x = 0$ ($\cos \frac{1}{x}$ nu are limită în $x = 0$).

0). Cu definiția, obținem $f'_3(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, deci f_3 este derivabilă pe \mathbb{R} și

$$f'_3(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că f_3 este diferențiabilă pe \mathbb{R} și diferențiala sa este funcția $df_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază

$$\text{fiecarui } x \in \mathbb{R} \text{ funcția } df_{3x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, df_{3x}(h) = \begin{cases} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})h, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Prin urmare funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ dată este diferențiabilă pe \mathbb{R} și diferențiala sa este funcția $df: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecarui $x \in \mathbb{R}$ funcția $df_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $df_x(h) = (f'_1(x)h, f'_2(x)h, f'_3(x)h)$.

Exercițiul 4.2.3. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy^2$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Evident, funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, date de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$ sunt continue

pe \mathbb{R}^2 și diferențiala sa este funcția

$df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecarui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcția liniară și continuă $df_{(x, y)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $df_{(x, y)}$

$$(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 \text{ adică}$$

$$df_{(x, y)}(h_1, h_2) = (3x^2 + y^2) \cdot h_1 + 2xy \cdot h_2$$

Exercițiul 4.2.4. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Funcția f are derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind compunere de funcții derivabile. Folosind regulile de derivare uzuale obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \\ &+ (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2}) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\text{Analog } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ pentru orice } (x, y) \neq (0, 0).$$

Cu definiția, obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} h_1 \sin \frac{1}{|h_1|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, h_2) - f(0, 0)}{h_2} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} h_2 \sin \frac{1}{|h_2|} = 0$$

Prin urmare, f este derivabilă parțial pe \mathbb{R}^2 , derivatele parțiale fiind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind compuneri de funcții elementare. Prin urmare funcția f este diferențiabilă pe mulțimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ și diferențiala sa este funcția $df: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \neq (0, 0)$ funcția liniară și continuă

$$df_{(x, y)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2.$$

Pentru studiul diferențiabilității funcției f în $(0, 0)$ teorema 4.1.3.2. nu mai este aplicabilă, deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt continue în $(0, 0)$ (pentru $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi\sqrt{2}}, n \in \mathbb{N}^*$ avem evident $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ și $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2}},$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$).

De aceea, pentru studiul diferențiabilității în $(0, 0)$ procedăm astfel: considerăm funcția liniară și continuă

$$L_{(0, 0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, L_{(0, 0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 = 0$$

Pentru $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avem

$$R(h) = \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - L_{(0, 0)}(h_1, h_2)|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{(h_1^2 + h_2^2) \left| \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \left| \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right|$$

Deoarece $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} R(h) = 0$, deducem că f este diferențiabilă în $(0, 0)$ și

$$df_{(0,0)} = L_{(0,0)}.$$

Prin urmare f este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și diferențiala sa este funcția $df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dată de $df_{(x,y)}$

$$(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2.$$

Exercițiul 4.2.5. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, y \sin x, x + y)$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și să se determine diferențiala sa.

Soluție. Componentele funcției f sunt funcții de clasă C^1 pe \mathbb{R} , deci diferențiabile pe \mathbb{R}^2 .

Dacă $f_1(x, y) = xy, f_2(x, y) = y \sin x, f_3(x, y) = x + y$, funcțiile $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y, \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \cos x, \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \sin x, \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1, \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$ sunt continue pe \mathbb{R}^2 . Matricea jacobiană a funcției f este

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y \cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pentru } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Diferențiala funcției f este funcția $df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcția liniară și continuă $df_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dată de

$$df_{(x,y)}(h_1, h_2) = J_f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y h_1 + x h_2 \\ (y \cos x) h_1 + (\sin x) h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 4.2.6. Să se determine dz dacă $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, xy\right)$, unde $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe A .

Soluție. Notând cu u, v variabilele funcției f și folosind regulile de derivare parțială a funcțiilor compuse, obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \\ &= \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \\ &= -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0 \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial u}$ și $\frac{\partial f}{\partial v}$ sunt continue, rezultă imediat că $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ sunt continue în orice punct (x, y) cu $y \neq 0$ și $dz_{(x, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \cdot h_2 = \left[\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \right] \cdot h_1 + \left[-\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \right] \cdot h_2$ pentru orice $y \neq 0$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercițiul 4.2.7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Demonstrați că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Soluție. Prin calcul direct rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 1 \text{ și}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = -1 \text{ de unde rezultă că } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Exercițiul 4.2.8. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Soluție. Deoarece f este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^3 , rezultă că toate punctele de extrem local se află printre punctele staționare ale lui f . Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

se obține un singur punct staționar : $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

Hessiana funcției f este aceeași în fiecare punct din \mathbb{R}^3 .

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\text{deci } H_f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculând determinanții principali obținem $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$.

Deducem că punctul staționar $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ este punct de minim local pentru funcția f .

Exercițiul 4.2.9. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x$.

Soluție. În acest caz $D = D_f = \mathbb{R}^3$. Funcția f fiind de clasă C^2 pe \mathbb{R}^3 , toate punctele de extrem local pentru f se află printre punctele staționare ale lui f .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2y + 20 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - 2x - 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 5 \end{cases}$$

Prin urmare funcția f are un singur punct staționar $\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$. Deoarece derivatele parțiale de ordinul doi sunt constante, hessiana funcției f este aceeași în orice punct din \mathbb{R}^3 .

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se obțin rezolvând ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 16) = 0$. Se obține $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2(1 + \sqrt{5}) > 0$,

$$\lambda_3 = 2(1 - \sqrt{5}) < 0.$$

Prin urmare punctul $\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$ este punct staționar pentru f , dar nu este punct de extrem local

pentru această funcție. Având în vedere că orice punct de extrem local trebuie să fie punct staționar deducem că f nu are puncte de extrem local.

Exercițiul 4.2.10. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y).$$

Soluție. Funcția f este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 și are o infinitate de puncte staționare.

$$\text{Într-adevăr, rezolvând sistemul } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 18x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = 0 \\ 12x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = 0 \end{cases}$$

se obțin următoarele puncte staționare: $(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$; $(3, 2)$.

Derivatele parțiale de ordinul doi sunt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36xy^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 36x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3 y.$$

Se obțin următoarele matrici hessiene:

$$H(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12\alpha^3 - 2\alpha^4 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$H(0, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } H(3, 2) = \begin{pmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{pmatrix}.$$

Punctul $(3, 2)$ este punct de maxim local pentru f deoarece $\Delta_1 = -144 < 0$,

$\Delta_2 = 2^4 \cdot 3^6 > 0$. Pentru a decide natura celorlalte puncte staționare nu se poate folosi teorema 4.1.3.6.

Deoarece aplicarea formulei Taylor este anevoioasă (primele derivate nenule în $(0, 0)$ sunt de ordinul 5), studiem direct semnul creșterilor $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ și $f(x, y) - f(0, \beta)$.

Evident, $\text{sgn}[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = \text{sgn}[x(6 - x - y)]$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci există $V_1 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ pentru orice $(x, y) \in V_1$ deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$ este punct de maxim local pentru f .

Dacă $\alpha = 0$ există $V_2 \in \mathcal{V}(0, 0)$ astfel încât $6 - x - y > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_2$, deci pentru orice $(x, y) \in V_2$, $\text{sgn}[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = \text{sgn}(x)$.

Este evident că $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui $(0, 0)$ ceea ce arată că $(0, 0)$ nu este punct de extrem pentru f .

Dacă $0 < \alpha < 6$, există $V_3 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_3$, deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha \in (0, 6)$ este punct de minim local pentru f .

Punctul $(6, 0)$ nu este punct de extrem local pentru f . Într-adevăr, există $V_4 \in \mathcal{V}(6, 0)$ conținută în întregime în semiplanul $x > 0$. Pentru orice $(x, y) \in V_4$, $\text{sgn}[f(x, y) - f(6, 0)] = \text{sgn}(6 - x - y)$. Este evident acum că

$f(x, y) - f(6, 0)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului $(6, 0)$.

Dacă $\alpha > 6$, există $V_5 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in V_5$ să avem $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ ceea ce arată că orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 6$ este punct de maxim local pentru f .

Analizăm la fel punctele $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Deoarece $\text{sgn}[f(x, y) - f(0, \beta)] = \text{sgn}[x(6 - x - y)]$ și orice vecinătate a punctului $(0, \beta)$ intersectează atât semiplanul $x < 0$ cât și semiplanul $x > 0$ rezultă că $f(x, y) - f(0, \beta)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a nici unui punct $(0, \beta)$, deci nici un punct $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ nu este punct de extrem local pentru f .

Exercițiul 4.2.11. Să se determine punctele de extrem local pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \ln(1 + |x - y|).$$

Soluție. Funcția are derivate parțiale pe mulțimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x - y}, & x > y \\ \frac{-1}{1 + y - x}, & x < y \end{cases}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{1 + x - y}, & x > y \\ \frac{1}{1 + y - x}, & x < y \end{cases}$$

$$\text{Deoarece rapoartele: } R_1(x) = \frac{f(x, \alpha) - f(\alpha, \alpha)}{x - \alpha} \text{ și}$$

$$R_2(y) = \frac{f(\alpha, y) - f(\alpha, \alpha)}{y - \alpha} \text{ nu au limită în punctul } \alpha, \text{ rezultă că } f \text{ nu este derivabilă parțial nici în raport}$$

cu x , nici în raport y , în punctul (α, α) , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este evident că funcția f nu are puncte staționare.

Deoarece $f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = f(x, y) = \ln(1 + |x - y|) \geq \ln 1 = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă (α, α) este punct de minim local și global pentru f .

Prin urmare această funcție are o infinitate de puncte de minim, nici un punct de maxim, nici un punct staționar.

Exercițiul 4.3.12. Să se demonstreze că originea este punct de minim global pentru funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Soluție. Deoarece } f(x, y) - f(0, 0) = y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 0 \text{ pentru orice}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă că $(0, 0)$ este punct de extrem global și local pentru f . Nici în acest caz teorema 4.1.3.6. nu poate fi aplicată.

4. FUNCȚII DIFERENȚIABILE. EXTREME LOCALE

4.3. Exerciții propuse

Exercițiul 4.3.1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale următoarelor funcții, precizând și domeniul lor de definiție:

$$a) f(x, y) = x^2 + y^2 - 3axy \quad b) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad c) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad d) f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$e) f(x, y) = x^y \quad f) f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$$

$$g) f(x, y) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad h) f(x, y, z) = \arctg \frac{z}{xy}.$$

Exercițiul 4.3.2. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale următoarelor funcții, precizând și domeniul lor de definiție:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Exercițiul 4.3.3. Demonstrați că funcția $z(x, y) = y \cdot \Phi(x^2 - y^2)$ verifică ecuația $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

unde Φ este o funcție de clasă C^1 pe \mathbb{R} .

Exercițiul 4.3.4. Demonstrați că funcția $z(x, y) = xy + x \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y + z$

unde Φ este o funcție de clasă C^1 pe \mathbb{R} .

Exercițiul 4.3.5. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

- Determinați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f și studiați continuitatea lor.
- Studiați diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0)$.

Exercițiul 4.3.6. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(xy^2)$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și să se calculeze diferențiala sa.

Exercițiul 4.3.7. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$f(x, y) = (\sin xy, \sin(x \sin y), \sin x - \cos y)$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și să se determine df .

Exercițiul 4.3.8. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \arctg \ln(x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ -\frac{\pi}{2} & , (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

a) Studiați diferențiabilitatea funcției f în $(0, 0, 0)$

b) Determinați $(grad f)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c) Determinați $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unde v este versorul gradientului funcției f în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercițiul 4.3.9. Demonstrați că dacă $z(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$ atunci $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ oricare ar fi

funcțiile f și g de clasă C^2 pe \mathbb{R} .

Exercițiul 4.3.10. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dacă

$z(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$ unde f este o funcție de clasă C^2 pe \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 4.3.11. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x, y) = e^x \sin y$ și punctul $(0, 0)$.

Exercițiul 4.3.12. Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f = (f_1, f_2), f_1(x, y) = (x - 1)e^y, f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

în $(0, 0)$.

R. f este diferențiabilă în $(0, 0)$; $df_{(0, 0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercițiul 4.3.13. Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ unde $f_1(x, y) = x^3 - y^3$, $f_2(x, y) = 3x^2y + 3xy^2$, $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = x - y$. Să se arate că funcțiile $f, g, f \circ g$ sunt diferențiabile pe \mathbb{R}^2 și să se scrie df, dg ,

$f \circ g$ și $d(f \circ g)$.

$$\mathbf{R.} \quad df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3x^2h_1 - 3y^2h_2 \\ (6xy + 3y^2)h_1 + (3x^2 + 6xy)h_2 \end{pmatrix}$$

$$dg_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ h_1 - h_2 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g)(x, y) = (6x^2y + 2y^3, 6x^3 - 6xy^2)$$

$$d(f \circ g)_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 12xy & 6x^2 + 6y^2 \\ 18x^2 - 6y^2 & -12xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12xyh_1 + (6x^2 + 6y^2)h_2 \\ (18x^2 - 6y^2)h_1 - 12xyh_2 \end{pmatrix} \text{ pentru orice } (x, y), (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercițiul 4.3.14. Să se determine extremele locale ale următoarelor funcții:

$$\text{a)} f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \text{b)} f(x) = \arctg \frac{1-x}{1+x} \quad \text{c)} f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \quad \text{d)} f(x) = |x-1|$$

$$\text{e)} f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1} \quad \text{f)} f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

R. a) $x = -1$ punct de maxim local, $x = 1$ punct de minim local; b) nu are;

c) $x = \frac{1}{2}$ punct de minim local; d) $x = 1$ punct de minim local; e) $x = 0$ punct de minim local; f) $x = e$

punct de minim local.

Exercițiul 4.3.15. Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

c) $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ d) $f(x, y) = xy^2 e^{x-y}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{(x+1)(y+2)(x+y)}$ f) $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

g) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ h) $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$

R. a) $(1, 1)$ punct de minim local; b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ punct de minim local;

c) $(0, 0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ puncte de minim local; d) $(-1, 2)$ punct de maxim local, $(\alpha, 0)$ este punct de minim

local dacă $\alpha > 0$, punct de maxim local și nu e punct de extrem dacă $\alpha = 0$; e) $(2, 1)$ punct de maxim local;

f) $(1, 0)$ punct de maxim local, $(1, 1)$ punct de minim local; g) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt

puncte de maxim local, iar $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt puncte de minim local; h) $(0, 0)$

punct de minim local.

Exercițiul 4.3.16. Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcții:

a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - xy + xz + 2yz$

c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

d) $f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + d$

e) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4x - 2y + 6z - 3$

f) $f(x, y, z) = xyz - (x+y)\ln z + 5$

R. a) $(0, 0, 0)$ punct de minim local; b) $(0, 0, 0)$ punct de minim local;

c) $(24, -114, -1)$ punct de minim local; d) (a, b, c) punct de minim local;

e) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ punct de minim local.

Exercițiul 4.3.17. Să se demonstreze că funcția $f(x, y) = (1 + e^x)\cos y - xe^x$ (x, y) $\in \mathbb{R}^2$ are o infinitate de puncte de maxim local și nici un punct de minim local.

5. FUNCȚII IMPLICITE. EXTREME CONDIȚIONATE.

5.1. Noțiuni teoretice. Rezultate fundamentale.

5.1.1. Funcții implicite.

În capitolele precedente am studiat funcții de una sau mai multe variabile date sub formă explicită, adică de forma $y = f(x)$, unde f ne arată concret cum depinde y de x . Sunt situații însă când legătura între mărimile x și y este dată implicit de o ecuație de forma $F(x, y) = 0$, explicitarea în raport cu y , de exemplu, nefiind posibilă întotdeauna în mod univoc.

În cele ce urmează vom arăta când este posibilă explicitarea unei ecuații $F(x, y) = 0$ și ce proprietăți putem deduce pentru explicitarea f (a cărei expresie analitică nu poate fi găsită în general) din proprietățile funcției F .

Definiția 5.1.1.1. Fie ecuația $F(x, y) = 0$ unde $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată, definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie D_x proiecția lui D pe axa Ox și fie $A \subseteq D_x$.

O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *soluție* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuației $F(x, y) = 0$ pe mulțimea A , dacă pentru orice $x \in A$, $F(x, f(x)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f pentru ecuația $F(x, y) = 0$, funcția f se numește *funcție definită implicit* de ecuația $F(x, y) = 0$ sau, pe scurt, *funcție implicită* (de o variabilă).

Teorema 5.1.1.1. Fie ecuația $F(x, y) = 0$ unde $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată, definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci

- a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ și o explicitare unică $f : U \rightarrow V$ (în raport cu y) a ecuației $F(x, y) = 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$;
- b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U și pentru orice $x \in U$,

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Această teoremă poate fi extinsă ușor la funcții implicite de mai multe variabile.

Definiția 5.1.1.2. Fie ecuația $F(x_1, x_2, \dots, x_p, y) = 0$, unde $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată, definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$ există $y \in \mathbb{R}$ încât $(x, y) \in D$. O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *soluție* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuației $F(x_1, x_2, \dots, x_p, y) = 0$ pe mulțimea A , dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$ avem: $F(x_1, x_2, \dots, x_p, f(x_1, x_2, \dots, x_p)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f a ecuației date, funcția f se numește *funcție definită implicit* de ecuația $F(x_1, x_2, \dots, x_p, y) = 0$ sau, pe scurt, *funcție implicită* (de variabilele reale x_1, x_2, \dots, x_p).

Observația 5.1.1.1. Dacă notăm $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ecuația $F(x_1, x_2, \dots, x_p, y) = 0$ se poate scrie $F(x, y) = 0$ iar soluția $y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ se scrie $y = f(x)$. Deci, putem considera numai ecuații de forma $F(x, y) = 0$ în care x este variabilă reală sau vectorială.

Teorema 5.1.1.2. Fie ecuația $F(x, y) = 0$, unde $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată, definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$.

Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 2) F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;
- 3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci:

- a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ și o explicitare unică $f: U \rightarrow V$ a ecuației $F(x, y) = 0$ (în raport cu y) încât $f(x_0) = y_0$;
b) explicitarea f este de clasă C^l pe U și pentru orice $x \in U$ și orice $j = 1, 2, \dots, p$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Să considerăm acum problema funcțiilor definite implicit prin sisteme de ecuații.

Definiția 5.1.1.3. Fie $F_i: D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ funcții date, definite pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$ există $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $(x, y) \in D$. Un sistem de funcții $\{f_i: A \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m\}$ se numește *soluție* sau *explicitare* (în raport cu variabilele y_1, y_2, \dots, y_m) pe mulțimea A a sistemului de ecuații $F_i(x, y) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ dacă $F_i(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, m$ și orice $x \in A$.

Dacă sistemul de ecuații dat are pe mulțimea A o singură soluție $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, spunem că funcțiile f_1, f_2, \dots, f_m sunt *definite implicit de sistemul de ecuații* dat sau, pe scurt, sistemul de funcții $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este un *sistem de funcții implicite* (de variabilele x_1, x_2, \dots, x_p)

Observația 5.1.1.2. Dacă pentru simplificarea scrierii, se notează

$x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, atunci F este o funcție vectorială definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ cu valori în \mathbb{R}^m , iar sistemul se scrie mai simplu:

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

Dacă se notează $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ atunci f este o funcție vectorială definită pe mulțimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în \mathbb{R}^m . A spune că sistemul de funcții $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ este o soluție a sistemului de ecuații dat revine la a spune că funcția vectorială f este o soluție a ecuației vectoriale

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

adică $F(x, f(x)) = \theta_{\mathbb{R}^m}$ pentru orice $x \in A$. În acest fel, un sistem de m funcții implicite reale, definite de un sistem de m ecuații, este echivalent cu o singură funcție implicită vectorială, definită de o ecuație vectorială. Se poate extinde acum ușor, teorema de explicitare de la ecuații la sisteme.

Teorema 5.1.1.3. Fie sistemul:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

unde $F_i: D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sunt funcții date, definite pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$. Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condițiile:

- 1) $F_i(x_0, y_0) = 0, i = 1, 2, \dots, m$;
- 2) Funcțiile $F_i, i = 1, 2, \dots, m$ sunt de clasă C^l pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;
- 3) $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci

- a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ și o explicitare unică $f: U \rightarrow V$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ a sistemului dat astfel încât $f(x_0) = y_0$;
b) funcțiile reale f_1, f_2, \dots, f_m sunt de clasă C^l pe U și

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, x_j, \dots, y_m)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m)}(x, f(x))}$$

pentru orice $x \in U, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p$.

(determinantul de la numărător se obține din jacobianul de la numitor prin înlocuirea coloanei derivatelor în raport cu y_i cu coloana derivatelor în raport cu x_j).

Observația 5.1.1.3. a) Oricare dintre cele trei teoreme anterioare reprezintă o teoremă de existență a funcției implicite f (scalare sau vectoriale, de una sau mai multe variabile); sunt date condiții suficiente care

asigură existența funcției implicite, de clasă C^1 , fără a da o metodă efectivă de explicitare, acest lucru nefiind, în general, posibil.

b) Punctele critice ale funcției $y = y(x)$ definită implicit de ecuația $F(x, y) = 0$ se determină punând condiția necesară $y' = 0$, adică rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Pentru precizarea punctelor de extrem se află semnul lui y'' în fiecare din punctele critice.

c) Dacă $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ecuația $F(x, y, z) = 0$ definește local, în condițiile teoremei 5.1.1.2., o funcție $z = z(x, y)$, astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y; z(x, y)) = 0$; deși, în general, această funcție nu se poate explicita efectiv, se pot calcula derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale lui z , iar pentru a determina extremele locale ale funcției z , se determină mai întâi punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases}$$

Se determină apoi semnul expresiei $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$ în fiecare dintre punctele critice, apoi semnul

lui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în fiecare dintre punctele în care această expresie este strict pozitivă.

5.1.2. Transformări punctuale în \mathbb{R}^p . Schimbări de coordonate.

Se știe că o funcție reală de o variabilă reală f este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă, iar, în anumite condiții, unele proprietăți ale funcției f se transmit funcției inverse f^{-1} . A determina f^{-1} este echivalent cu a explicita, în raport cu x , ecuația $f(x) - y = 0$.

Pentru funcții de mai multe variabile, problema inversării este mai complicată. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ este o funcție vectorială de componente f_1, f_2, \dots, f_m , ecuația vectorială $f(x) - y = \theta_{\mathbb{R}^m}$ este echivalentă cu sistemul

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) - y_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

iar determinarea inversei (atunci când există) revine la explicitarea sistemului în raport cu variabilele x_1, x_2, \dots, x_p . Conform celor prezentate în teorema 5.1.1.3., numărul variabilelor ce pot fi explicitate coincide cu numărul de ecuații; prin urmare, trebuie ca $m = p$, iar pentru a putea utiliza teorema 5.1.1.3. trebuie considerate funcții de clasă C^1 . De aceea, în cele ce urmează, considerăm $A \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțime deschisă, $T : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe A și căutăm condiții care să asigure existența inversei $T^{-1} : B \rightarrow A$, unde $B = T(A)$, precum și diferențiabilitatea lui T^{-1} .

Definiția 5.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p, B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțimi deschise.

O aplicație $T : A \rightarrow B$ de clasă C^1 pe A se numește *transformare punctuală* de la A la B .

Prin aplicația T , de componente f_1, f_2, \dots, f_p , oricărui punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in B$ unde $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, y_p = f_p(x_1, \dots, x_p)$ ceea ce justifică denumirea de transformare punctuală.

Definiția 5.1.2.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p, B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțimi deschise. O transformare punctuală $T: A \rightarrow B$ se numește *difeomorfism* (sau *transformare regulată*) dacă T este bijectivă și inversa ei $T^{-1}: B \rightarrow A$ este o transformare punctuală de la B la A .

Aplicând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $f_i(x_1, \dots, x_p) - y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, în teorema următoare sunt date condiții suficiente pentru ca transformarea punctuală T , de componente f_1, f_2, \dots, f_p să aibă o restricție inversabilă, iar inversa să fie tot o transformare punctuală, adică, local, să fie difeomorfism.

Teorema 5.1.2.1. (de inversiune locală) Fie $T: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ o transformare punctuală, de componente f_1, f_2, \dots, f_p , pe mulțimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ și fie $x_0 \in A$ un punct astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(x_0) \neq 0$$

Atunci există o vecinătate deschisă U_0 a punctului x_0 și o vecinătate deschisă V_0 a punctului $y_0 = T(x_0)$, astfel ca T să fie difeomorfism de la U_0 la V_0 .

Observația 5.1.2.1. a) Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ sunt componentele transformării inverse T^{-1} , ținând seama de observația 4.1.4.1. b), avem:

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(x_0) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)}{D(y_1, y_2, \dots, y_p)}(T(x_0)) = I,$$

adică :

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)}{D(y_1, y_2, \dots, y_p)}(T(x_0)) = \left[\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_p)}{D(x_1, x_2, \dots, x_p)}(x_0) \right]^{-1}$$

Această egalitate corespunde formulei care dă derivata funcției inverse a unei funcții derivabile de o variabilă. Deci, din acest punct de vedere, în cazul transformărilor punctuale, rolul derivatei îl joacă jacobianul transformării.

b) Rezultatul stabilit în teorema 5.1.2.1. are un caracter local, chiar dacă jacobianul transformării este nenul în orice punct din A . De exemplu, dacă

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este transformarea dată prin $x(r, \theta) = r \cos \theta, y(r, \theta) = r \sin \theta$ jacobianul transformării T este

$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r$; conform teoremei 5.1.2.1., orice punct (r, θ) cu $r \neq 0$ are o vecinătate în care transformarea T

este bijectivă, dar T nu este bijectivă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ din cauza periodicității funcțiilor \sin și \cos , imaginile punctelor diferite $(r, \theta), (r, \theta + 2\pi)$ coincid, deci T nu este injectivă.

Definiția 5.1.2.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă. O transformare punctuală injectivă $T: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ care stabilește un difeomorfism de la A la $B = T(A)$ se numește *schimbare de coordonate* în A . Dacă f_1, f_2, \dots, f_p sunt componentele lui T , atunci pentru orice $x \in A$, numerele $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ se numesc *coordoanatele lui x în sistemul de coordonate T* .

Exemplul 5.1.2.1. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0 \text{ și } y > 0\}$.

Aplicația $T: A \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (r, \theta)$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x}$ este o schimbare de coordonate,

numită trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare în A .

Observația 5.1.2.2. Teorema 5.1.2.1. afirmă că, dacă T este o transformare punctuală cu jacobianul nenul într-un punct x_0 , atunci, local, (într-o vecinătate a lui x_0) T este o schimbare de coordonate.

5.1.3. Extreme condiționate. Puncte de extrem global.

Ne punem mai întâi problema determinării extremelor unei funcții luând în considerare valorile acestora doar în punctele care îndeplinesc anumite condiții suplimentare date. De exemplu, dacă se cere să

se determine acel punct al planului $x + y + z = 1$ care se află la cea mai mică distanță față de origine, trebuie să determinăm, evident, minimumul funcției $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luând în considerare doar tripletele (x, y, z) care îndeplinesc condiția $x + y + z = 1$. Aceasta este o problemă simplă de extrem condiționat. O cale naturală de rezolvare este următoarea: se explicitează ecuația dată în raport cu z , de exemplu, se introduce z în expresia funcției și se obține o problemă de extrem obișnuit pentru funcția de două variabile obținută (care reprezintă restricția funcției d la planul considerat). Deoarece practic această explicitare, în general, nu este realizabilă, se recurge la o metodă indirectă, bazată pe teorema funcțiilor implicite, pe care o vom prezenta în continuare.

Definiția 5.1.3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ o mulțime deschisă, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe D . Presupunem că între variabilele $x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m$ există m condiții (restricții, legături): $g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$, unde $g_i: D \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ sunt de clasă C^1 pe D . Fie

$$M = \{(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) \in D: g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Se numește *punct de extrem local al funcției f condiționat de*

$g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ orice punct

$(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0) \in M$ pentru care există o vecinătate $V \subseteq D$, încât diferența $f(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) - f(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ să aibă semn constant pe $M \cap V$.

Utilizând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0,$

$i = 1, 2, \dots, m$, teorema care urmează dă condiții necesare ca un punct să fie punct de extrem local condiționat pentru o funcție dată.

Teorema 5.1.3.1. (Lagrange) Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$.

Fie $(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0) \in D$ un punct de extrem local al funcției f , condiționat de legăturile $g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ unde funcțiile $g_i: D \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$ sunt de clasă C^1 pe D și

$$\frac{D(g_1, g_2, \dots, g_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0) \neq 0$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ astfel încât punctul $(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ să fie punct critic pentru funcția

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$$

(Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar funcția F se numește *funcție Lagrange*)

Observația 5.1.3.1. Dacă

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p; y_1(x_1, \dots, x_p), \dots, y_m(x_1, \dots, x_p))$$

unde $y_1 = y_1(x_1, \dots, x_p), y_2 = y_2(x_1, \dots, x_p), \dots, y_m = y_m(x_1, \dots, x_p)$ sunt explicitări locale ale sistemului $g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ atunci funcția Φ reprezintă restricția funcției f la mulțimea M și, evident, $(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ este punct de extrem local pentru f , condiționat de $g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ dacă și numai dacă (x_1^0, \dots, x_p^0) este punct de extrem local pentru funcția Φ . Prin urmare, în practică, teorema 5.1.3.1. se aplică astfel: fiind date funcția f și legăturile

$g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ se consideră funcția Lagrange

$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$ cu numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ nedeterminate; se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ \frac{\partial F}{\partial y_i}(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ g_i(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_m) = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Acest sistem are $p + 2m$ ecuații și $p + 2m$ necunoscute. Dacă $x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ este o soluție a acestui sistem, atunci $(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ este punct critic pentru funcția Lagrange F corespunzătoare multiplicatorilor $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$. Pentru a vedea dacă

$(x_1^0, \dots, x_p^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ este punct de extrem condiționat pentru f este suficient să verificăm dacă (x_1^0, \dots, x_p^0) este punct de extrem local pentru funcția Φ ; dacă f și $g_i, i = 1, 2, \dots, m$ sunt funcții de clasă C^2 putem studia hessiana funcției Φ în punctul (x_1^0, \dots, x_p^0) .

Definiția 5.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară $x_0 \in A$. Punctul x_0 se numește *punct de extrem global* al funcției f dacă diferența $f(x) - f(x_0)$ are semn constant pe A . Mai precis, punctul x_0 se numește *punct de maxim* (respectiv *minim*) *global* al lui f dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$)

Observația 5.1.3.2. Dacă f este de clasă C^1 pe A atunci f este diferențiabilă și, prin urmare, continuă pe A . Ținând seama de teorema 3.1.5.4., dacă A este compactă atunci f este mărginită și își atinge marginile pe A . Prin urmare, există $x_*, x^* \in A$ astfel încât $f(x_*) = \inf f(A)$, $f(x^*) = \sup f(A)$. Evident, x_* este punct de minim global, iar x^* este punct de maxim global pentru funcția f . Dacă $Int(A)$ reprezintă interiorul mulțimii A , iar $Fr(A)$ reprezintă frontiera mulțimii A , atunci:

$$Int(A) = \{x \in A : \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A\}$$

$$Fr(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ și } V \cap CA \neq \emptyset\}$$

Deoarece A este compactă (deci mărginită și închisă) avem:

$$A = Int(A) \cup Fr(A).$$

Deoarece $x_* \in A$ deducem că $x_* \in Int(A)$ sau $x_* \in Fr(A)$.

Dacă $x_* \in Int(A)$, atunci x_* este punct de minim local pentru f , iar dacă $x_* \in Fr(A)$, presupunând că $Fr(A)$ poate fi definită prin ecuații carteziane, atunci x_* este punct de minim pentru f , condiționat de aceste ecuații. O discuție asemănătoare are loc pentru x^* .

Astfel, dacă se cer marginile unei funcții de clasă C^1 pe o mulțime compactă A (punctele de extrem global) se aplică teorema lui Fermat pentru a determina punctele de extrem local situate în interiorul mulțimii compacte și teorema lui Lagrange pentru cele care se află pe frontieră. Având asigurată existența punctelor x_*, x^* (prin teorema 3.1.5.4.) este suficient să calculăm valorile funcției f în toate punctele staționare determinate și să reținem valorile extreme.

5. FUNCȚII IMPLICITE. EXTREME CONDIȚIONATE.

5.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 5.2.1. Să se determine y' și y'' dacă $y = y(x)$ este o funcție definită implicit de ecuația $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Soluție. Fie $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Evident F este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ dacă și numai dacă } y = 0 \text{ sau } x^2 + y^2 - 1 = 0. \text{ Prin urmare, ecuația } F(x, y) = 0 \text{ definește pe } y \text{ ca}$$

funcție de x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulțimea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ care verifică ecuația dată. Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 ecuația dată are soluție unică $y(x)$.

$$\text{Obținem, } y' = -\frac{x}{y}.$$

$$\text{Calculul direct arată că } y'' = -\frac{y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y + x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Exercițiul 5.2.2. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea ale unei funcții z definită implicit de ecuația: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$

Soluție. Fie $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$. Evident, F este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^3 .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 6z - y. \text{ Ecuația } F(x, y, z) = 0 \text{ definește pe } z \text{ ca}$$

funcție de variabilele x, y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulțimea $D = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0, 6z - y \neq 0\}$

Pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ecuația dată are soluție unică $z(x, y)$. Calculul direct arată că:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{-4y - z + 1}{6z - y}. \text{ Derivând încă o dată, ținând seama că } z = z(x, y)$$

obținem :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2(6z - y) - 2x \cdot 6 \frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y) + 2x \cdot 6 \frac{2x}{6z - y}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y)^2 + 24x^2}{(6z - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(6z - y) - (-4y - z + 1) \cdot 6 \frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = \frac{2x(25y - 6)}{(6z - y)^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{\left(-4 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)(6z - y) - (-4y - z + 1)\left(6 \frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(6z - y)^2} = \\ &= \frac{150z^2 - 50yz + 50y - 100y^2 - 6}{(6z - y)^3}. \end{aligned}$$

Printr-un calcul asemănător se arată că $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Această egalitate se poate deduce observând că F este de clasă C^2 , de unde deducem că z este de clasă C^2 și, prin urmare, derivatele mixte sunt egale.

Exercițiul 5.2.3. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$ dacă z este funcția definită implicit de ecuația $x^2 + 2y^2 +$

$3z^3 + xy - z - 9 = 0$ și de condiția $z(1, -2) = 1$.

Soluție. Funcția $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9$ și punctul $(1, -2, 1)$ satisfac condițiile teoremei 5.1.1.2.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = - \frac{2x + y}{9z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = - \frac{4y + z}{9z^2 - 1}$$

pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului $(1, -2)$.

$$\text{Atunci } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = - \frac{(9z^2 - 1) - (4y + z) \left(18z \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(9z^2 - 1)^2}.$$

$$\text{Deoarece } z(1, -2) = 1, \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0 \text{ rezultă } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2) = - \frac{8}{8^2} = -\frac{1}{8}.$$

Exercițiul 5.2.4. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$ definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} u + v - x - y = 0 \\ xu + yv - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluție. Fie $F_1(x, y, u, v) = u + v - x - y$ și $F_2(x, y, u, v) = xu + yv - 1$

Calcule simple arată că:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -1, \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1, \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1, \frac{\partial F_1}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = u, \frac{\partial F_2}{\partial y} = v, \frac{\partial F_2}{\partial u} = x, \frac{\partial F_2}{\partial v} = y$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y - u$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y - v$$

Rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y-u}{y-x} = \frac{y+u}{y-x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y+v}{y-x}$ pentru $y-x \neq 0$. Analog $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u+x}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v+x}{y-x}$.

Derivatele de ordinul doi se calculează folosind regula de derivare a câtului și ținând seama că $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y+u}{y-x} \right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(y-x) - (y+u)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{2(y+u)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y+v}{y-x} \right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(y-x) - (y+v)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-u-x+y+v}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y+v}{y-x} \right) = \frac{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)(y-x) - (y+v)}{(y-x)^2} = \frac{-2(x+v)}{(y-x)^2}$$

Analog se determină $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Exercițiul 5.2.5. Să se determine extremele unei funcții implicate $y = y(x)$ definită de ecuația $x^3 + 8y^3 - 6xy = 0$.

Soluție. Fie $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy$. Avem $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6y$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 6x.$$

Ecuația $F(x, y) = 0$ definește pe y ca funcție implicită de variabila x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulțimea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^3 + 8y^3 - 6xy = 0, 4y^2 - x \neq 0\}.$$

Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 avem:

$$y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2y}{4y^2 - x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^3 + 8y^3 - 6xy = 0 \\ 4y^2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{2} \\ y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x - 2y'(x))(4y^2 - x) - (x^2 - 2y)(8y \cdot y'(x) - 1)}{(4y^2 - x)^2}$$

Deoarece $y'(x_0) = 0$, deducem că $y''(x_0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x_0}{(4y_0^2 - x_0)} = -1 < 0$ și deci $x_0 = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim pentru funcția $y = y(x)$ definită implicit de ecuația dată în vecinătatea acestui punct; valoarea maximă a lui y este $y(x_0) = y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Exercițiul 5.2.6. Să se determine extremele unei funcții implicate $z = z(x, y)$ definită de ecuația

Soluție. Fie $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

Evident, în orice punct $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 2z$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 2x - 2z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z - 2x - 2y$. Deci F este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^3 .

Ecuția $F(x, y, z) = 0$ definește pe z ca funcție implicită de variabilele x și y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulțimea

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0, 10z - 2x - 2y \neq 0\}.$$

Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y + z - 5x}{5z - x - y}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{x + z - 5y}{5z - x - y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z - 5x = 0 \\ x + z - 5y = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0 \\ 5z - x - y \neq 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x = y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = -4 \end{cases}$.

Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui z sunt :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 5\right)(5z - x - y) - (y + z - 5x)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - 5\right)(5z - x - y) - (x + z - 5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z - x - y) - (x + z - 5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z - x - y)^2}$$

Ținând cont de teorema 5.1.1.2. ecuația dată definește în mod unic pe z ca funcție de x și y pe o vecinătate a punctului $(1, 1, 4)$. Punctul $(1, 1)$ este punct critic pentru această funcție și $z(1, 1) = 4$. Hessiana lui z în $(1, 1)$ este

$$H_z(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0$ și $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$. Prin urmare, $(1, 1)$ este punct de maxim local pentru funcția $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația dată în vecinătatea acestui punct, iar valoarea maximă este $z(1, 1) = 4$.

Analog, $(-1, -1)$ este punct critic pentru unica funcție $z = z(x, y)$ obținută aplicând teorema 5.1.1.2. ecuației date și punctului $(-1, -1)$. Hessiana acestei funcții este

$$H_z(-1, -1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = \frac{5}{18} > 0$ și $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$ rezultă că $(-1, -1)$ este punct de minim pentru această funcție.

Valoarea minimă este $z(-1, -1) = -4$.

Exercițiul 5.2.7. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x + y + z$ condiționate de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Soluție. Fie $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \right)$ cu $x \neq 0, y \neq 0,$

$$z \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Rezolvând sistemul } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

se obțin soluțiile $\lambda_1 = 9, x_1 = y_1 = z_1 = 3$.

$\lambda_2 = 1, x_2 = y_2 = 1, z_2 = -1$

$\lambda_3 = 1, x_3 = z_3 = 1, y_3 = -1$

$\lambda_4 = 1, y_4 = z_4 = 1, x_4 = -1$

Fie $\Phi(x, y) = F(x, y, z(x, y))$ restricția lui F la mulțimea

$$M = \{(x, y, z): \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\}$$

$$\text{Atunci } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \text{ unde}$$

$z = z(x, y)$ este definită implicit de restricția $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Derivând restricția în raport cu x (respectiv y) obținem $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2}{x^2}$ (respectiv $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{y^2}$).

Rezultă că $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{z^2}{x^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 - \frac{z^2}{y^2}$. Calculând derivatele parțiale de ordinul doi obținem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2z^2(z+x)}{x^4}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{2z^3}{x^2 y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2z^2(z+y)}{y^4}$$

Obținem $H_\Phi(3, 3) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = \frac{4}{3} > 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$ rezultă că $(3, 3)$ este punct de minim pentru Φ , deci $(3, 3, 3)$ este punct de minim condiționat pentru f .

$$H_{\Phi}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, H_{\Phi}(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } H_{\Phi}(-1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

În aceste cazuri valorile proprii sunt soluții ale ecuației $\lambda^2 - 4 = 0$ adică $\lambda_{1,2} = \pm 2$, ceea ce arată că punctele staționare $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ și $(-1, 1, 1)$ nu sunt puncte de extrem condiționat.

Exercițiul 5.2.8. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = xyz$ condiționate de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $x + y + z = 0$.

Soluție: Fie $F(x, y, z) = xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x + y + z)$ cu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Adunând primele trei ecuații și ținând cont de ultima, obținem

$xy + xz + yz + 3\lambda_2 = 0$, iar din

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

rezultă $xy + xz + yz = -\frac{1}{2}$ deci $\lambda_2 = \frac{1}{6}$.

Scăzând primele două ecuații obținem $(y - x)(z - 2\lambda_1) = 0$. Dacă $y = x$ obținem punctele

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \text{ și } \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Considerând acum $z = 2\lambda_1$, înmulțind prima ecuație cu x , a doua cu y , a treia cu z și adunând

$$\text{rezultă } \begin{cases} 3xyz + 2\lambda_1 = 0 \\ z = 2\lambda_1 \end{cases}.$$

Deci $3xyz + z = 0$ de unde $z = 0$ sau $3xy = -1$.

$$\text{Se observă că } z = 0 \text{ nu convine, iar din } \begin{cases} 3xy = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ se obțin soluțiile}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

λ_1 se calculează în fiecare caz din relația $3xyz + 2\lambda_1 = 0$. Fie acum

$\Phi(x) = f(x, y(x), z(x))$, unde $y = y(x)$, $z = z(x)$ sunt explicitări locale ale sistemului de restricții

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că $\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z'(x)$. Derivând membru cu membru restricțiile rezultă

$$\begin{cases} 2x + 2y \cdot y'(x) + 2z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases}$$

de unde $y'(x) = \frac{z-x}{y-z}$ și $z'(x) = \frac{x-y}{y-z}$.

Cum $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ obținem $\Phi'(x) = yz - xy - xz + x^2$ și $\Phi''(x) = y'z + yz' - y - xy' - z -$

$xz' + 2x = 2(2x - y - z)$. Deoarece $\Phi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$ rezultă că $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de minim condiționat. Valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Analog, deoarece

$\Phi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$ deducem că punctele $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt

puncte de maxim condiționat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Punctele $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ și

$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ trebuie analizate separat deoarece ele nu satisfac condiția $y \neq z$.

În vecinătatea fiecăruia dintre ele sistemul de restricții definește implicit pe x și pe y ca funcție de z .

Derivând în raport cu z sistemul de restricții obținem:

$$\begin{cases} 2x \cdot x'(z) + 2y \cdot y'(z) + 2z = 0 \\ x'(z) + y'(z) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{adică } \begin{cases} x'(z) = \frac{y-z}{x-y} \\ y'(z) = \frac{z-x}{x-y} \end{cases}, x \neq y.$$

Restricția funcției f la mulțimea M poate fi scrisă acum astfel:

$$\psi(z) = f(x(z), y(z), z).$$

Deci $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(z) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(z) + \frac{\partial f}{\partial z} = z^2 - yz - xz + xy$, $x \neq y$.

$$\psi''(z) = 2z - y'z - y - x'y - x + x'y + xy' = 2(2z - x - y).$$

Se observă că $\psi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$, deci $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim condiționat, iar valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, în timp ce $\psi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$, deci $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim condiționat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Exercițiul 5.2.9. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ și $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Soluție. Deoarece f este continuă, iar A este mulțime compactă, rezultă că marginile $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ există și sunt atinse.

Determinăm punctele staționare ale lui f .

$$\text{Sistemul } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y = 0 \end{cases} \text{ are soluție unică } x = y = 0.$$

Deci f are un singur punct staționar $(0, 0)$ și acesta se află în interiorul lui A .

Funcția Lagrange este $F(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Din sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ se obțin patru puncte staționare pe frontiera lui } A, \text{ anume}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ și } \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

$$\text{Calcul elementare arată că } f(0, 0) = 0, f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}, f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2} \text{ și}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că $\inf f(A) = f(0, 0) = 0$ și

$$\sup f(A) = f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}.$$

Exercițiul 5.2.10. Să se determine punctele curbei $x^2 + xy + y^2 = 1$ care sunt cele mai depărtate de origine.

Soluție. Trebuie să determinăm punctele de extrem ale funcției

$f(x, y) = x^2 + y^2$ (pătratul distanței de la (x, y) la $(0, 0)$) condiționate de $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Funcția Lagrange este $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda x + 2(1 + \lambda)y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Soluțiile sunt: $\lambda_1 = -2$ cu două puncte staționare $(1, -1)$ și $(-1, 1)$ și $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ cu două puncte staționare

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Aplicând metoda prezentată în exercițiul 5.3.9. se arată că $(1, -1)$ și $(-1, 1)$ sunt puncte de maxim condiționat.

Punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt puncte de minim condiționat. Punctele cele mai depărtate de origine, situate pe curba dată sunt $(1, -1)$ și $(-1, 1)$.

5. FUNCȚII IMPLICITE. EXTREME CONDIȚIONATE.

5.3. Exerciții propuse

Exercițiul 5.3.1. Să se determine y' și y'' dacă $y = y(x)$ este funcția definită implicit de ecuația:

a) $y^5 + x^2y^3 + x^2 + y = 0$ în vecinătatea punctului $(0, 0)$

b) $y^2 + x^5 - 1 = 0$ în vecinătatea punctului $(0, 1)$

Exercițiul 5.3.2. Să se determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z = z(x, y)$ este funcția definită de ecuația $x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$-1 = 0$ și punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$.

Exercițiul 5.3.3. Să se determine y' și z' dacă $y = y(x)$ și $z = z(x)$ sunt definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 10z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases}$$
 în vecinătatea punctului $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$.

Exercițiul 5.3.4. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, e-1)$ dacă $z = z(x, y)$ este funcția definită implicit de ecuația x

$+ y + z = e^z$ și de condiția $z(0, e-1) = 1$.

Exercițiul 5.4.5. Fie $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe \mathbb{R} ;

ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ definește implicit pe z ca funcție de x și y (local).

Să se arate că $(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.

Exercițiul 5.3.6. Să se determine extremele unei funcții $y = y(x)$ definită implicit de ecuația:

a) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0$

b) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

R. a) $y(-4) = -2$ maxim local, $y(-3) = -1$ minim local

b) $y(0) = -1$ maxim local, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ maxim local.

Exercițiul 5.3.7. Să se determine extremele unei funcții $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația:

a) $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

c) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

R. a) Pentru funcția z_1 care satisface condiția $z_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1$ punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de minim. Pentru

funcția z_2 care satisface condiția $z_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -2$, punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de maxim.

b) Pentru funcția z_1 care satisface condiția $z_1(1, -2) = -2$, punctul $(1, -2)$ este punct de minim. Pentru funcția z_2 care satisface condiția $z_2(1, -2) = 8$, punctul $(1, -2)$ este punct de maxim.

c) $(-1, 2)$ este punct de maxim pentru funcția z_1 care satisface condiția $z_1(-1, 2) = -2$. $(-1, 2)$ este punct de minim pentru funcția z_2 care satisface condiția $z_2(-1, 2) = 1$.

Exercițiul 5.3.8. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ condiționate de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

R. $(2, 2)$ punct de maxim ($\lambda = -1$), $(-2, -2)$ punct de minim ($\lambda = 1$)

Exercițiul 5.3.9. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x + y + z$ condiționate de $x - y + z = 2$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

R. $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ punct de maxim, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$(0, -2, 0)$ punct de minim, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Exercițiul 5.3.10. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ condiționate de $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. $(1, 1, 1)$ punct de minim, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Exercițiul 5.3.11. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = xy$ condiționate de $x + y = 1$.

R. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punct de maxim, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Exercițiul 5.3.12. Să se determine extremele funcției $f(x, y) = x + 2y$ condiționate de $x^2 + y^2 = 5$.

R. $(1, 2)$ punct de maxim, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $(-1, -2)$ punct de minim, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exercițiul 5.3.13. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = xy^2z^3$ condiționate de $x + y + z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. $(2, 4, 6)$ punct de maxim

Exercițiul 5.3.14. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Exercițiul 5.3.15. Să se determine $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$ dacă:

a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$,
 $2z^2 \leq 8\}$

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 +$

b) $f(x, y, z) = z - y - x$,
 $= 0, 4x - 3z = 0\}$

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2y^2 + z^2 - 1$

Exercițiul 5.3.16. Pe curba $y = x^2$, $z = x^2$ din \mathbb{R}^3 să se determine punctul cel mai apropiat de $(0, 0, 1)$

Exercițiul 5.3.17. În planul $3x - 2z = 0$ să se determine punctul cu proprietatea că suma pătratelor distanțelor la punctele $(1, 1, 1)$ și $(2, 3, 4)$ este cea mai mică posibilă.

Exercițiul 5.3.18. Între toate triunghiurile de perimetru dat $2p$ să se determine acela a cărui arie este maximă.

R. triunghiul echilateral.

6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

6.1.1. Metoda lui Darboux de a defini integrala simplă

Fie $[a, b]$ un interval. Descompunem intervalul $[a, b]$ într-un număr oarecare de segmente, de lungimi arbitrare, prin punctele:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

Notăm cu d această descompunere și o numim *diviziunea intervalului* $[a, b]$.

Definiția 6.1.1.1. Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ determinată de punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$.

Se numește *norma diviziunii* d numărul :

$$\|d\| = \max \{x_i - x_{i-1} ; i = 1, 2, \dots, p\}$$

Dacă d' este o altă diviziune a intervalului $[a, b]$, spunem că d' este mai fină decât d și o notăm $d' > d$ dacă mulțimea punctelor care determină diviziunea d este inclusă în mulțimea punctelor care determină diviziunea d' .

Definiția 6.1.1.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe $[a, b]$ și fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

Pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, p$, fie $m_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ și $M_i = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Formăm sumele:

$$s(d) = \sum_{i=1}^p m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(d) = \sum_{i=1}^p M_i (x_i - x_{i-1})$$

Suma $s(d)$ se numește *suma inferioară Darboux*, iar $S(d)$ se numește *suma superioară Darboux*, atașată funcției f pe intervalul $[a, b]$, corespunzătoare diviziunii d a intervalului.

Definiția 6.1.1.3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Se numește *integrala inferioară Darboux* a funcției f pe intervalul $[a, b]$ numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

Se numește *integrala superioară Darboux* a funcției f pe intervalul $[a, b]$ numărul:

$$\bar{I} = \inf \{S(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

(\mathcal{D} este mulțimea tuturor diviziunilor posibile ale intervalului $[a, b]$).

Definiția 6.1.1.4. Funcția mărginită $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește integrabilă pe $[a, b]$, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară Darboux pe acest interval. Valoarea lor comună se numește *integrala simplă* a funcției f pe intervalul $[a, b]$, *în sens Darboux*. Se notează :

$$I = \underline{I} = \bar{I} = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 6.1.1.1. (Criteriul lui Darboux de integrabilitate)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ avem $S(d) - s(d) < \varepsilon$.

6.1.2. Metoda lui Riemann de a defini integrala simplă

Definiția 6.1.2.1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară și fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$ determinată de punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$

Pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, p$ alegem $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Notăm $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$.

$$\text{Suma } \sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^p f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ se numește } \textit{sumă Riemann} \text{ sau sumă integrală a funcției } f$$

pe intervalul $[a, b]$ corespunzătoare diviziunii d și alegerii punctelor intermediare ζ .

Definiția 6.1.2.2. Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *integrabilă în sens Riemann* pe $[a, b]$, dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \eta$ și oricare ar fi punctele intermediare $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$ să aibă loc inegalitatea $|\sigma(d, \zeta) - I| < \varepsilon$.

Prin urmare funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă există în \mathbb{R} $\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sigma(d, \zeta)$ și această limită nu depinde de alegerea ζ a punctelor intermediare.

Numărul real I , a cărui unicitate se poate deduce ușor, se numește *integrala în sens Riemann* a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Teorema 6.1.2.1. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$, atunci f este mărginită.

Prin urmare, dacă f este *nemărginită* pe $[a, b]$, atunci f *nu este integrabilă* în sens Riemann pe $[a, b]$.

Teorema 6.1.2.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Atunci funcția f este integrabilă în sens Darboux pe $[a, b]$, dacă și numai dacă f este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$. Integrala în sens Darboux a funcției f pe $[a, b]$ coincide cu integrala în sens Riemann a lui f pe $[a, b]$.

6.1.3. Clase de funcții integrale

Teorema 6.1.3.1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 6.1.3.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 6.1.3.3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

6.1.4. Proprietăți ale funcțiilor integrale și ale integralei

Teorema 6.1.4.1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice interval $[c, d] \subset [a, b]$.

Teorema 6.1.4.2. (Proprietatea de aditivitate a integralei față de interval).

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară și $c \in (a, b)$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$, dacă și numai dacă f este integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$.

În acest caz avem
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 6.1.4.3. (*Proprietatea de liniaritate a integralei față de funcție*).

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții integrabile pe $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrare. Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 6.1.4.4. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții integrabile pe $[a, b]$. Atunci funcția $f \cdot g$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 6.1.4.5. (*Proprietatea de monotonie a integralei*)

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții integrabile pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci avem :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

În particular, dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Teorema 6.1.4.6. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$. Atunci $|f|$ este o funcție integrabilă și avem :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Observația 6.1.4.1. Există funcții care nu sunt integrabile, dar au modulul integrabil : funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1$, dacă $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ și $f(x) = -1$, dacă $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ nu este integrabilă pe $[0, 1]$, dar, evident, $|f|$ este funcție integrabilă pe $[0, 1]$.

Teorema 6.1.4.7. (*Teorema de medie*)

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe $[a, b]$, $a < b$,

$m = \inf \{f(x); x \in [a, b]\}$, $M = \sup \{f(x); x \in [a, b]\}$ atunci există $\mu \in [m, M]$ astfel încât
$$\int_a^b f(x)dx = \mu (b - a).$$

Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există $\zeta \in [a, b]$ astfel încât $\mu = f(\zeta)$ și formula de medie devine :

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta) (b - a)$$

6.1.5. Metode de calcul al integralei simple

Metodele de calcul exact al integralei simple au la bază două teoreme fundamentale ale calculului integral, care stabilesc legătura dintre integrala simplă și primitiva unei funcții.

Definiția 6.1.5.1. Dacă $J \subset \mathbb{R}$ este un interval, funcția $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitivă pe J , dacă există o funcție $F: J \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe J , încât $F' = f$.
Funcția F se numește, în acest caz, *primitivă* a funcției f .

Observația 6.1.5.1. O condiție necesară ca funcția f să admită primitivă pe J este ca f să aibă proprietatea lui Darboux. Prin urmare, dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe J , atunci f nu admite primitivă pe J . Mai general, o funcție care are un punct de discontinuitate de speța întâi pe J , nu admite primitivă pe J .

Teorema 6.1.5.1. Fie $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval compact inclus în J ; fie $a \in J$ fixat și fie funcția $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \text{ Atunci :}$$

- 1) Funcția F este continuă pe J ;
- 2) Funcția F este derivabilă în orice punct $x_0 \in J$ în care funcția f este continuă și $F'(x_0) = f(x_0)$

Prin urmare, dacă f este *continuuă* pe J , atunci F este o *primitivă* pentru f pe intervalul J .

Teorema 6.1.5.2. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă care admite primitive. Atunci, oricare ar fi F , o primitivă a lui f pe intervalul $[a, b]$, avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (formula Leibnitz-Newton)}$$

Observația 6.1.5.2. Formula Leibnitz-Newton reduce calculul integralei funcției f pe intervalul $[a, b]$ la determinarea unei primitive F a funcției f pe acest interval. Cum pentru o clasă destul de largă de funcții se poate determina primitive, rezultă că pentru o clasă destul de largă de funcții putem calcula exact integrala.

Cu ajutorul formulei Leibnitz-Newton se pot demonstra formula de integrare prin părți și formula schimbării de variabilă care, în anumite condiții, reduce calculul unor integrale la calculul altora, mai ușor de calculat.

Teorema 6.1.5.3. Fie $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivate integrabile. Atunci :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(formula de integrare prin părți)

Observația 6.1.5.3. Formula se aplică în cazul când integrala

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx \text{ este mai ușor de calculat decât } \int_a^b f(x)g'(x)dx \text{ iar } f' \text{ și } g \text{ se deduc și ele ușor.}$$

Teorema 6.1.5.4. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ o funcție derivabilă, cu φ' integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, în particular, φ de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$. Atunci :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

(prima formulă de schimbare de variabilă)

Observația 6.1.5.4. Prima formulă de schimbare de variabilă reduce calculul integralei funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ la calculul integralei funcției f , în cazul când acesta din urmă este mai ușor. Funcția φ realizează

“schimbarea de la variabila x la variabila t ”. În mod practic, dacă avem de calculat $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se caută mai

întâi f și φ care să satisfacă condițiile teoremei și astfel încât $g(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, apoi se aplică direct formula de mai sus. În unele probleme însă, funcția g de integrat poate fi pusă sub forma $g(x) = f(\varphi(x))$. În acest caz, evident că formula schimbării de variabilă de mai sus nu poate fi aplicată direct. Totuși, în anumite condiții mai restrictive, impuse funcției φ , se poate aplica indirect această formulă. Mai precis, are loc următoarea:

Teorema 6.1.5.5. Fie $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ o funcție continuă, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ o funcție bijectivă, astfel încât inversa sa $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ este derivabilă, iar derivata $(\varphi^{-1})'$ este integrabilă pe $[a, b]$; toate aceste condiții sunt îndeplinite, dacă φ este de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$ și $\varphi'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$. Atunci:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \cdot (\varphi^{-1})'(t)dt$$

(a doua formulă de schimbare de variabilă)

Observația 6.1.5.5. Nu se poate da o indicație general valabilă, totuși, pentru anumite tipuri de funcții se pot da metode standard de alegere a funcției φ .

Exemplul 6.1.5.1. Dacă $g(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}\right)$, $x \in [\alpha, \beta]$, unde

$R(u, v)$ este o funcție rațională, atunci alegând $\varphi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională.

Exemplul 6.1.5.2. Dacă $g(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $a \neq 0$, unde $R(u, v)$ este o funcție rațională, atunci integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se poate reduce la o integrală dintr-o funcție rațională, folosind

substituțiile lui Euler. Se deosebesc trei cazuri:

- dacă $a > 0$, se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t$
- dacă $c > 0$, se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$
- dacă $b^2 - 4ac > 0$, se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$

unde x_1 este una dintre rădăcinile trinomialului $ax^2 + bx + c$ (se presupune, evident, că $ax^2 + bx + c \geq 0$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$).

Exemplul 6.1.5.3. Dacă $g(x) = R(\sin x, \cos x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, unde $R(u, v)$ este o funcție rațională, folosind funcția $\varphi(x) = tg \frac{x}{2}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcție rațională.

Exemplul 6.1.5.4. Dacă $g(x) = x^m(ax^n + b)^p$, $x \in [\alpha, \beta]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$,

$m, n, p \in \mathbb{Q}$, $ax^n + b \geq 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, atunci $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se numește *integrală binomă* (Cebîșev) și

se poate calcula elementar numai în următoarele trei cazuri:

- $p \in \mathbb{Z}$; se folosește funcția $\varphi(x) = x^{1/r}$, unde r este numitorul comun al numerelor raționale m și n .

- b) $p \notin \mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; se folosește funcția $\varphi(x) = (ax^n + b)^{1/s}$, unde s este numitorul lui p .
- c) $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ dar $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; în acest caz se folosește funcția $\varphi(x) = (a + bx^{-n})^{1/s}$, unde s este, de asemenea, numitorul lui p . În toate cele trei cazuri, integrala binomă se transformă într-o integrală dintr-o funcție rațională.

Observația 6.1.5.6. Dacă în calculul integralei $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ alegem

pentru schimbarea de variabilă o funcție φ astfel încât $g(x) = f(\varphi(x))$, dar φ nu este inversabilă pe $[\alpha, \beta]$, atunci se descompune intervalul $[\alpha, \beta]$ într-un număr finit de subintervale, încât pe fiecare subinterval funcția φ să aibă o restricție inversabilă, se aplică a doua formulă de schimbare de variabilă pe fiecare subinterval, apoi se folosește proprietatea de aditivitate a integralei față de interval.

Observația 6.1.5.7. Metodele de calcul exact expuse mai sus presupun cunoscute primitivele anumitor funcții. Există însă cazuri simple, când există primitivele, dar acestea nu pot fi exprimate cu ajutorul

funcțiilor elementare: $\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{e^x}{x}, \frac{1}{\ln x}, e^{x^2}, \sin x^2, \cos x^2$ etc. au primitive pe domeniul lor de

definiție (fiind continue), care însă nu pot fi determinate prin nici una din metodele elementare. De aceea sunt prezentate în continuare și câteva *metode de calcul aproximativ al integralei simple*. Ideea acestor metode este sugerată de însăși definiția integralei: dacă

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, considerând un șir arbitrar $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|d_n\| = 0$ și fixând pentru fiecare diviziune d_n o alegere a punctelor intermediare ζ^n , atunci șirul

numeric $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $\sigma_n = \sigma(d_n, \zeta^n)$, converge la $\int_a^b f(x)dx$. Prin urmare, pentru a aproxima integrala,

cu o anumită eroare, este suficient, să calculăm un anumit termen al șirului $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Particularizând modul de alegere al diviziunilor și al punctelor intermediare, se obțin diferite metode de calcul aproximativ al integralelor.

Teorema 6.1.5.6. (*Metoda dreptunghiurilor*)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă. Considerăm o diviziune d a intervalului $[a, b]$, determinată de punctele:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

cu $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, iar ca puncte intermediare alegem

$\zeta_i = x_{i-1}$ sau $\zeta_i^* = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

sau

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n^* = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Dacă funcția f este derivabilă, cu derivata mărginită pe $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sigma_n \right| \leq A \cdot \frac{(b-a)^2}{n}$$

unde $A = \sup \{ |f'(x)|; x \in [a, b] \}$.

Observația 6.1.5.8. Dacă funcția f este crescătoare pe $[a, b]$, atunci σ_n aproximează integrala prin lipsă, iar σ_n^* prin adaos, de aceea media lor aritmetică constituie o aproximare mai bună.

Teorema 6.1.5.7. (Metoda trapezelor)

În condițiile teoremei precedente, avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\sigma_n + \sigma_n^*}{2} = \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Dacă funcția f are derivata de ordinul doi mărginită pe $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{\sigma_n + \sigma_n^*}{2} \right| \leq B \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

unde $B = \sup \{ |f''(x)|; x \in [a, b] \}$.

Teorema 6.1.5.8. (Metoda tangentelor)

În condițiile teoremei 6.1.5.6., luând $n=2m$, avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1})$$

Teorema 6.1.5.9. (Metoda lui Simpson)

În condițiile teoremei 6.1.5.6., luând $n = 2m$, t_n valoarea aproximativă a integralei obținută prin metoda trapezelor, T_n cea obținută prin metoda tangentelor avem :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2t_n + T_n}{3} = \frac{b-a}{6m} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b)]$$

Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită pe $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{2t_n + T_n}{3} \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^5}{2880m^4},$$

unde $M = \sup \{ |f^{(4)}(x)|; x \in [a, b] \}$.

Observația 6.1.5.9. O altă metodă de aproximare a integralei simple este metoda de integrare prin dezvoltarea în serie de puteri. Această metodă, furnizată de teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri constă în dezvoltarea funcției f în serie de puteri, integrarea termen cu termen a acestei serii,

obținerea integralei $\int_a^b f(x)dx$ ca sumă a unei serii numerice și aproximarea acesteia cu o sumă parțială convenabilă.

6.1.6. Aplicații ale integralei simple

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$. Atunci *aria domeniului* $D \subset \mathbb{R}^2$, mărginit de graficul funcției f , axa ox și dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$, este dată de

$$a(D) = \int_a^b |f(x)| dx \quad (6.1.6.1)$$

Volumul corpului $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox este dat de :

$$v(\Omega) = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (6.1.6.2)$$

Dacă funcția f are derivate continuă pe $[a, b]$, atunci *lungimea arcului de curbă* $(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$, care are ecuația $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ este dată de :

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (6.1.6.3)$$

6.1.7 Integrala simplă cu parametru.

Definiția 6.1.7.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ și $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru fiecare $x \in A$, funcția $t \rightarrow f(x, t)$ este integrabilă pe

$[a, b]$. Funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ se numește *integrală cu parametru* (cu “limite fixe”. Parametrul este x).

Definiția 6.1.7.2. Fie $\varphi, \psi : A \rightarrow [a, b]$ două funcții, astfel încât $\varphi(x) \leq \psi(x)$, pentru orice $x \in A$, iar pentru orice $x \in A$ funcția $t \rightarrow f(x, t)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi(x), \psi(x)]$. Funcția $\tilde{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ se numește, de asemenea, *integrală cu parametru* (cu “limite variabile”. Parametrul este x).

Teorema 6.1.7.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval neapărat compact, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dacă funcția $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $A \times J$, atunci funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ este continuă pe A .

Teorema 6.1.7.2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval neapărat compact, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Fie $\varphi, \psi : A \rightarrow [a, b]$ două funcții continue pe A și $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $A \times J$. Atunci funcția $\tilde{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ este continuă pe A .

Teorema 6.1.7.3. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ și funcția $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $A \times J$, are derivată parțială în raport cu x , continuă pe $A \times J$, atunci

funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ este derivabilă pe A și, pentru orice $x \in A$, avem:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

În plus, funcția F' este continuă pe A .

Teorema 6.1.7.4. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Fie $\varphi, \psi : A \rightarrow J$ două funcții arbitrare de clasă C^1 pe A , $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $A \times J$. Atunci funcția $\tilde{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ este derivabilă pe A și pentru orice $x \in A$, avem:

$$\tilde{F}'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Teorema 6.1.7.5. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Fie

$f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $A \times J$. Atunci funcția ,

$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ și are loc egalitatea

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right] dt$$

Observația 6.1.7.1. Egalitatea din concluzia teoremei precedente se poate scrie:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right] dt$$

Această formulă arată că, în condițiile teoremei, putem schimba ordinea de integrare.

Observația 6.1.7.2. Pentru integralele cu parametru cu limite variabile nu putem da în mod direct o asemenea formulă. Putem însă, prin schimbarea de variabilă:

$$t = \varphi(x) + z [\psi(x) - \varphi(x)],$$

să reducem integrala cu limite variabile la o integrală cu limite fixe, și apoi să schimbăm ordinea de integrare. Prin urmare, dacă $\varphi, \psi : A \rightarrow [a, b]$ sunt continue pe A , iar $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $A \times J$, atunci funcția

$\tilde{F} : A \rightarrow \mathbb{R}$ $\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$ este integrabilă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset A$ și avem:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \tilde{F}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^1 g(x, z) dz \right] dx = \int_0^1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} g(x, z) dx \right] dz$$

unde g este funcția $g : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x, z) = f(x, \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)]) \cdot [\psi(x) - \varphi(x)],$$

care este evident continuă pe $A \times [0, 1]$, ceea ce justifică ultima egalitate.

6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 6.2.1. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

b) $\int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$

d) $\int_1^e \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

e) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$

g) $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

h) $\int_2^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$

Soluții. a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx =$
 $= 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^1 x (\sqrt{4-x^2})' dx =$
 $= 4 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 + x \sqrt{4-x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx =$
 $= 4 \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$

Deci $2 \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$, adică $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) Aplicăm de două ori formula de integrare prin părți:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x dx &= - \int_0^{1/2} (e^{-x})' \cos \pi x dx = -e^{-x} \cdot \cos \pi x \Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2} e^{-x} (-\sin \pi x) \cdot \pi dx = 1 - \\ \pi \int_0^{1/2} e^{-x} \sin \pi x dx &= 1 + \pi \int_0^{1/2} (e^{-x})' \sin \pi x dx = 1 + \pi e^{-x} \sin \pi x \Big|_0^{1/2} - \pi \int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x \cdot \pi dx = \\ &= 1 + \pi e^{-1/2} - \pi^2 \int_0^{1/2} e^{-x} \cdot \cos \pi x dx \end{aligned}$$

Rezultă că $(1 + \pi^2) \int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x dx = 1 + \pi e^{-1/2}$ și deci

$$\int_0^{1/2} e^{-x} \cos \pi x dx = \frac{1 + \pi e^{-1/2}}{1 + \pi^2} = \frac{\sqrt{e} + \pi}{\sqrt{e}(1 + \pi^2)}.$$

c) Avem
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \sin^2 x)'}{1 + \sin^2 x} dx$$

și folosind prima formulă a schimbării de variabilă, obținem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x) \Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

d) Se observă că $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)'$ și folosind formula de integrale prin părți, obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)' \cdot \ln x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x \Big|_1^e + \int_0^e \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^e \frac{1}{x(1+x^2)} dx \end{aligned}$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale folosim descompunerea în fracții simple, și anume:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Un calcul simplu ne arată că $A = 1$, $B = -1$ și $C = 0$.

Deci $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$ și deci integrala cerută devine:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_1^e \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_1^e \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \Big|_1^e = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln(1+e^2) + \frac{1}{4} \ln 2 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

e) Se folosește a doua formulă a schimbării de variabilă. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{e^x - 1} = t$, adică $x = \ln(1+t^2)$. Integrala devine:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \int_0^2 \frac{(1+t^2) \cdot t}{1+t^2+3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = \\
&= 2 \left(t \Big|_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_0^2 \right) = 2 \left(2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = 4 - \pi
\end{aligned}$$

f) Se folosește schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, de unde $x = 2 \operatorname{arctg} t$ și integrala cerută devine:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{2}{6t^2 + 4t + 4} dt = \int_0^1 \frac{1}{3t^2 + 2t + 2} dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 - \frac{1}{3}} dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{5}{3}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

(s-a ținut seama de $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ și $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$)

g) Folosim schimbarea de variabilă $x = 2 \sin t$

$$\begin{aligned}
&\text{Avem : } \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cdot \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} 2^4 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 2 \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4t}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi
\end{aligned}$$

h) Efectuăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, deci $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. Integrala devine:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)^2}{4t} \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exercițiul 6.2.2. Să se determine aria domeniului $D \subset \mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcției $f(x) = e^{-x} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 2\pi$.

Soluție. Ținând seama de 6.1.6.1. avem :

$$a(D) = \int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

Integrând prin părți, obținem

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = - \int_0^{\pi} e^{-x} (\cos x)' dx = -e^{-x} \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (e^{-x})' \cos x dx = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = e^{-\pi} + 1 -$$

$$e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} (\sin x)' dx =$$

$$= e^{-\pi} + 1 - e^{-x} \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

$$\text{Rezultă: } \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

Analog,

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} (\cos x)' dx = e^{-x} \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} (e^{-x})' \cos x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \cos x dx = -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} (\sin x)' dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - e^{-x} \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} (e^{-x})' \sin x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

$$\text{Rezultă: } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} (e^{-2\pi} + e^{-\pi}).$$

$$\text{Prin urmare, } a(D) = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1) + \frac{1}{2} (e^{-2\pi} + e^{-\pi}) = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi}.$$

Exercițiul 6.2.3. Să se determine volumul corpului $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Soluție. Ținând seama de 8.1.6.2., deducem:

$$v(\Omega) = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Exercițiul 6.2.4. Să se determine lungimea graficului funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin e^{-x}$.

Soluție. Ținând seama de 6.1.6.3., obținem:

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx =$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \Big|_1^e = \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}).$$

Exercițiul 6.2.5. Să se arate că funcția $F: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t) dt \text{ este continuă pe } (1, \infty).$$

Soluție. Funcția $f : (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, t) = \ln(x^2 - \sin^2 t)$ este continuă pe $(1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcții continue (evident, pentru orice $(x, t) \in (1, \infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $x^2 - \sin^2 t > 0$).

Exercițiul 6.2.6. Fie $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x \cos t) dt$$

Să se arate că funcția F este derivabilă pe $(-1, 1)$ și să se determine derivata ei.

Soluție. Funcția $f : (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x \cos t)$$

este continuă pe $(-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcții continue.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{1 + x \cos t} \cdot \cos t = \frac{1}{1 + x \cos t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ este evident continuă pe } (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Deci } F \text{ este derivabilă pe } (-1, 1), \text{ iar } F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x \cos t} dt.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$, obținem:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2(1-x) + (1+x)} du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{arctgu} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Bigg|_{u=0}^{u=1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Exercițiul 6.2.7. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1 + x \cos t}{1 - x \cos t} dt, \text{ unde } x \in (-1, 1).$$

Soluție. Integrala cerută nu poate fi calculată prin metode elementare. Sunt satisfăcute însă condițiile teoremei 6.1.7.3. pentru funcția

$f : (-1, 1) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x, t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x \cos t}{1-x \cos t}$. Așadar funcția

$F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x \cos t}{1-x \cos t} dt$ este derivabilă pe

$(-1, 1)$ și $F'(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+x \cos t)(1-x \cos t)} dt$, pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Integrala obținută se mai poate scrie:

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x \cos t} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x \cos t} dt$$

și folosind substituția $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$, se obține:

$$F'(x) = 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x) + (1-x)u^2} du + 2 \int_0^1 \frac{1}{(1-x) + (1+x)u^2} du,$$

adică $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]$ și folosind egalitatea trigonometrică $\operatorname{arctg} \alpha +$

$\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, obținem

$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$, pentru orice $x \in (-1, 1)$, de unde deducem că

$F(x) = \pi \arcsin x + C$, unde C trebuie determinat.

Făcând pe $x = 0$, obținem $F(0) = C$ și, cum din relația de definiție $F(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Prin urmare, $F(x) = \pi \arcsin x$, pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Exercițiul 6.2.8. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzând de un

parametru, să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$, unde

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}, & x \neq 0, x \neq 1, \text{ unde } 0 < \alpha < \beta \\ 0, & x = 0 \\ \beta - \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

Soluție. Observăm că $\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} = \int_\alpha^\beta x^t dt$, deci $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta x^t dt \right] dx$

Cum teorema 8.1.7.5. este aplicabilă, schimbând ordinea de integrare, obținem:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.3. Exerciții propuse

Exercițiul 6.3.1. Să se calculeze :

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(x + |x|) dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^2 (|x| - |3x - 1|) dx$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{d) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$\text{e) } \int_1^5 \sqrt[3]{x - |x - 3|} dx$$

$$\text{f) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$\text{g) } \int_0^3 \max(x, x^2) dx$$

$$\text{h) } \int_0^{\pi/2} \min(\sin x, \cos x) dx$$

R. a) 1 ; b) $-\frac{25}{3}$; c) $\sqrt{x} = t, \sqrt{1+t} = t + u$; d) $\operatorname{tg} x = t$; $\frac{1}{4} \ln 3$
 e) $\frac{25}{8} \sqrt[3]{3} - \frac{3}{8}$; f) $\cos x = t$; $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$; g) $\frac{55}{6}$; h) $2\sqrt{2}$

Exercițiul 6.3.2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, $n \in \mathbb{N}$. Să se stabilească o relație de recurență și să se calculeze I_3 .

$$\text{R. } I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^+; I_3 = \frac{32}{315}.$$

Exercițiul 6.3.3. Să se calculeze :

$$\text{a) } \int_1^2 \sqrt{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} x |\cos x| dx$$

$$\text{c) } \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$$

$$\text{e) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + x - 1}{e^x + \sin x + \cos x + 2x} dx$$

$$\text{f) } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

R. a) $\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi \ln 2}{8}$; e) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi/2} + 1 + \pi}{2}$;
 f) $x = \pi - t, I = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercițiul 6.3.4. Să se calculeze :

$$\text{a) } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$$

$$\text{e) } \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$\text{f) } \int_0^a \sqrt{ax-x^2} dx$$

R. a) Indicație. Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ și se obține $I = \frac{\pi}{4}$; b) $x = \operatorname{tg} t$;

$$\frac{\pi}{8} \ln 2; \text{ c) } e^{\frac{\pi}{2}}; \text{ d) } \frac{\pi}{\sqrt{5}}; \text{ e) } \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}; \text{ f) } \frac{\pi a^2}{8}.$$

Exercițiul 6.3.5. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx; \text{ b) } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$$

R. a) 1,605...; b) 0,927...

Exercițiul 6.3.6. Să se determine aria domeniului mărginit de :

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \text{ axa } Ox, x=1 \text{ și } x=2$$

$$\text{b) } f(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, \text{ axa } Ox, x=0 \text{ și } x=2$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}, \text{ axa } Ox, x=0 \text{ și } x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{R. a) } \ln(2-\sqrt{3}) + \sqrt{3}; \text{ b) } \ln \frac{16}{9}; \text{ c) } -2 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$$

Exercițiul 6.3.7. Să se determine aria domeniului mărginit de graficele funcțiilor $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln^2 x$.

R. $3 - e$

Exercițiul 6.3.8. Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

$$\text{R. } \frac{\pi}{27} (5e^3 - 2)$$

Exercițiul 6.3.9. Să se determine lungimea graficului pentru următoarele funcții :

$$\text{a) } f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{3/2}$$

$$\text{b) } f: [\sqrt{3}, \sqrt{8}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$$

$$\text{R. a) } \frac{8}{27} (10^{3/2} - 1); \text{ b) } 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

Exercițiul 6.3.10. Să se arate că funcțiile următoare sunt continue pe domeniile indicate:

$$\text{a) } F(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 + x \cos t) dt, x \in (-1, 1);$$

$$\text{b) } F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x \cos t) dt; x \in (-1, 1);$$

$$\text{c) } F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln \frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t} dt; x \in (-1, 1);$$

$$\text{d) } F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt; x \in (0, \infty);$$

$$\text{e) } F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2 t^2)}{\sqrt{1 - t^2}} dt; x \in (-1, 1);$$

$$\text{f) } F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} t} \cdot \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} t) dt; x \in [0, \infty).$$

Exercițiul 6.3.11. Folosind teorema de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze următoarele integrale :

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \ln(1 + x \cos t) dt; x \in (-1, 1);$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x \cos t) dt, |x| < 1$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln \frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t} dt, |x| < 1$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt, x > 0$$

$$\text{e) } \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2 t^2)}{\sqrt{1 - t^2}} dt, |x| < 1$$

$$\text{f) } \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2 t^2)}{t^2 \sqrt{1 - t^2}} dt, |x| < 1$$

$$\text{g) } \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(x \sin t)}{\sin t} dt$$

$$\text{h) } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} t} \cdot \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} t) dt, x \geq 0$$

$$\text{i) } \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t) dt, x > 1$$

$$\begin{aligned} \text{R. a) } & \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}, \text{ b) } \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos x)^2, \text{ c) } \pi \arcsin x, \text{ d) } \pi \ln \frac{x+1}{2}, \text{ e) } \\ & \pi \ln \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-x^2} \right), \text{ f) } \pi \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right), \\ \text{g) } & \frac{\pi}{2} \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right), \text{ h) } \frac{\pi}{2} \ln(x+1), \text{ i) } \pi \ln \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2} \end{aligned}$$

Exercițiul 6.3.12. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare, să se calculeze:

$$\text{a) } \int_0^1 f(x) dx, \text{ unde } f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \cdot \sin(\ln x), & x \neq 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } x = 1 \end{cases},$$

$$\alpha, \beta > 0$$

$$\text{b) } \int_0^1 f(x) dx, \text{ unde } f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \cdot \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \\ \beta - \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{R. a) } \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}, \text{ b) } \frac{1}{2} \ln \frac{(b+1)^2 + 1}{(a+1)^2 + 1}$$

Exercițiul 6.3.13. Utilizând integralele cu parametru, să se calculeze:

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{26}{15} - \sin^2 t \right) dt$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + 9 \sin^2 t) dt$$

$$\text{c) } I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \ln \left(1 + \frac{\cos t}{2} \right) dt$$

$$\text{d) } I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\sin t)}{\sin t} dt$$

$$\text{R. a) } \text{Se observă că } I_1 = F\left(\frac{5}{4}\right), \text{ unde } F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t) dt \text{ Folosind rezultatul exercițiului}$$

8.4.25, punctul i), obținem $I_1 = 0$.

$$\text{b) } I_2 = \pi \ln 2; \text{ c) } I_3 = \frac{5\pi^2}{72}; \text{ d) } I_4 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale.

Definiția 7.1.1. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unde I este un interval arbitrar cu extremitățile $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Funcția f se numește *impropriu integrabilă pe I* dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I și, pentru

orice $c \in I$, există și sunt finite limitele: $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ a > \alpha}} \int_a^c f(x)dx$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow \beta \\ b < \beta}} \int_b^c f(x)dx$. Suma acestor limite se numește *integrala improprie* a funcției f pe intervalul I și notăm:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ a > \alpha}} \int_a^c f(x)dx + \lim_{\substack{x \rightarrow \beta \\ b < \beta}} \int_b^c f(x)dx$$

Dacă funcția f este impropriu integrabilă pe I , se mai spune că integrala improprie $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este *convergentă*. În caz contrar, ea este *divergentă*.

Observația 7.1.1. a) Definiția convergenței, precum și valoarea integralei improprii sunt independente de alegerea punctului $c \in I$.

b) Deoarece integrala simplă este funcție continuă de extremitățile sale de integrare, rezultă că dacă $I = [\alpha, \beta]$ este un interval compact, integrala improprie a funcției f pe intervalul I coincide cu integrala simplă a acestei funcții pe acest interval. Din același motiv, integrala funcției f pe intervalul $[\alpha, \beta]$ coincide cu integrala funcției f pe fiecare din intervalele: $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, (α, β) . Analog dacă $\beta = \infty$, integrala pe $[\alpha, \infty)$ coincide cu integrala pe (α, ∞) . Este suficient deci să cunoaștem integralele improprii pe intervale deschise.

c) O integrală improprie poate fi redusă la o integrală improprie doar la unul din capete, scriind :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^c f(x)dx + \int_c^{\beta} f(x)dx$$

De aceea este suficient să ne ocupăm de integrala improprie la unul din capete. Ca și la integrala simplă, acceptăm și la integrala improprie că :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Prezentăm în continuare, câteva *proprietăți ale integralelor improprii*, care se transpun fără dificultate de la integralele simple.

Teorema 7.1.1. (Proprietatea de liniaritate)

Dacă funcțiile $f_1, f_2: [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt impropriu integrabile pe $[\alpha, \beta)$ atunci, pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ funcția $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este impropriu integrabilă pe $[\alpha, \beta)$ și

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx = \lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx$$

Teorema 7.1.2. (Formula Leibnitz-Newton pentru integrala improprie)

Dacă funcția $f: [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$ și admite o primitivă F pe $[\alpha, \beta)$, atunci f este impropriu integrabilă pe $[\alpha, \beta)$, dacă și numai dacă F are limită finită în β . În acest caz:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\substack{x \rightarrow \beta \\ x < \beta}} F(x) - F(\alpha)$$

Teorema 7.1.3. (Formula de integrare prin părți)

Dacă $f, g : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile cu derivate continue pe $[\alpha, \beta)$, încât $f \cdot g$ are limită în β și $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ este convergentă și are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \lim_{\substack{x \rightarrow \beta \\ x < \beta}} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

(evident că rolul celor două integrale improprii care apar poate fi schimbat)

Teorema 7.1.4. (Formula schimbării de variabilă)

Fie $f : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : [\alpha', \beta') \rightarrow [\alpha, \beta)$ încât $\varphi(\alpha') = \alpha$, $\lim_{\substack{x \rightarrow \beta' \\ x < \beta'}} \varphi(x) = \beta$

Dacă φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[\alpha', \beta')$, f este continuă pe $[\alpha, \beta)$ și $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ este

$$\text{convergentă, atunci și integrala } \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$$

este convergentă și are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Observația 7.1.2. Dacă cunoaștem o primitivă a funcției $f : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, putem stabili natura (convergența

sau divergența) integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. După cum se știe, nu întotdeauna este posibil să

determinăm o primitivă. De aceea este util să cunoaștem criterii de convergență, criterii cu ajutorul cărora să putem stabili natura unei integrale improprii, fără a pretinde să-i găsim valoarea exactă.

Teorema 7.1.5. (Criteriul lui Cauchy)

Fie $f : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval compact inclus în $[\alpha, \beta)$. Atunci

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, încât pentru orice $b',$

$b'' \in (\beta - \delta, \beta)$ să avem :

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 7.2.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii și să se determine valorile acestora, în caz de convergență:

a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

c) $\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

d) $\int_0^{\infty} \cos x dx$

e) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

e) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Soluții. a) Funcția $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este integrabilă pe orice interval compact $[a, b] \subset (-1, 1)$, fiind continuă. Deoarece $F(x) = \arcsin x$ este o primitivă pentru f , rezultă că

$$\int_a^b f(x)dx = \arcsin b - \arcsin a.$$

Deoarece $\lim_{\substack{b \rightarrow 1 \\ b < 1}} \arcsin b = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{\substack{a \rightarrow -1 \\ a > -1}} \arcsin a = -\frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \text{ este convergentă și valoarea sa este } \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

b) Funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în $(0, 1)$, fiind continuă. Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$, funcția poate fi prelungită prin continuitate în $x = 0$, prin urmare integrala este neesențial improprie la acest capăt. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty$, integrala este improprie în limita superioară. Deoarece $F(x) = (\arcsin \sqrt{x})^2$ este o primitivă a funcției f , deducem imediat că integrala este convergentă și

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin \sqrt{x} = t$ se poate deduce imediat

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} 2t dt = t^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

c) Cu formula Leubnitz-Newton obținem imediat:

$$\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{3/\pi}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) $\int_0^{\infty} \cos x dx$ este divergentă, deoarece primitiva $F(x) = \sin x$ nu are limită la ∞ .

e) Funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-ax} \cdot \sin bx$ este continuă pe $[0, \infty)$, deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[0, \infty)$. Integrând de două ori prin părți, se obține primitiva $F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{-ax}$, $x \in (0, \infty)$. Cum $a > 0$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} = 0$ și cum

$$\left| -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} \right| \leq \frac{a + |b|}{a^2 + b^2}$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$, deducem că $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Rezultă că integrala dată este convergentă. Deoarece

$$F(0) = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \text{ rezultă}$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(0) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

f) Funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ este continuă pe $[0, \infty)$ deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[0, \infty)$. Utilizând descompunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}, x \in [0, \infty)$$

$$\begin{aligned} & \text{se obține primitiva } F(x) = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\arctg(\sqrt{2}x+1) + \arctg(\sqrt{2}x-1) \right] + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Deoarece } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \text{ și } F(0) = 0, \text{ rezultă că integrala este convergentă și valoarea sa este} \\ & \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Exercițiul 7.2.2. Fie $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ funcția definită prin

$$f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}. \text{ Să se demonstreze că integrala } \int_0^{\infty} f(x, t) dt \text{ converge simplu (punctual) pe } (0, \infty).$$

Soluție. Pentru orice $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, 1]$ avem $0 < f(x, t) \leq t^{x-1}$.

Cum $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$, rezultă că, pentru fiecare $x \in (0, \infty)$, funcția $t \mapsto f(x, t)$ este impropriu integrabilă pe

$(0, \infty)$, deci integrala $\int_0^{\infty} f(x, t) dt$ este punctual convergentă pe $(0, \infty)$.

Observația 7.2.1. Se poate defini funcția $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ prin

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, cunoscută sub numele de *funcția "gama" a lui Euler*.

Exercițiul 7.2.3. Fie $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ funcția definită prin $f(x, y, t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. Să

se demonstreze că integrala $\int_0^1 f(x, y, t) dt$ converge simplu (punctual) pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Soluție. Fie $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ funcția definită prin $g(x, y, t) = t^{x-1} + (1-t)^{y-1}$. Fie $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ fixat. Dacă

$t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, atunci $(1-t)^{y-1} \leq 2$, deci $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq 2t^{x-1} \leq 2g(x, y, t)$, iar dacă $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci $0 < t^{x-1} = t^x$

$\frac{1}{t} \leq 2$ deci $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq 2(1-t)^{y-1} \leq 2g(x, y, t)$. Deci, pentru orice $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ și orice $t \in (0, 1)$,

$f(x, y, t) \leq 2g(x, y, t)$.

Cum $\int_0^1 g(x, y, t) dt = \int_0^1 t^{x-1} dt + \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, rezultă că funcția $t \rightarrow f(x, y, t)$ este

impropriu integrabilă pe $(0, 1)$, deci integrala $\int_0^1 f(x, y, t) dt$ este punctual convergentă pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Observația 7.2.2. Din exercițiul 9.3.6. rezultă că se poate defini integrala improprie cu doi parametri, $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ prin

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ cunoscută sub numele de *funcția "beta" a lui Euler*.

Exercițiul 7.2.4. Să se demonstreze că integrala $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+t^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ converge punctual, dar nu converge uniform pe \mathbb{R} .

Soluție. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și $b < \infty$. Evident,

$$\int_0^b \frac{xdx}{1+t^2x^2} = \arctg(tx) \Big|_{t=0}^{t=b} = \arctg bx.$$

Deoarece $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{xdx}{1+t^2x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg bx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{daca } x > 0 \\ 0, & \text{daca } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x < 0 \end{cases}$ rezultă că integrala dată converge

punctual pe \mathbb{R} . Putem defini $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{x dt}{1+t^2 x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{daca } x > 0 \\ 0, & \text{daca } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{daca } x < 0 \end{cases}$$

Să observăm că funcția F este discontinuă în $x = 0$. Funcția

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, t) = \frac{x}{1+t^2 x^2} \text{ este, evident, continuă pe } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

Dacă integrala ar fi uniform convergentă pe \mathbb{R} , aplicând teorema 7.1.15., ar rezulta că F este continuă pe \mathbb{R} , ceea ce este fals. Rezultă că integrala dată nu este uniform convergentă pe \mathbb{R} .

Exercițiul 7.2.5. Să se demonstreze că funcția $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ este derivabilă pe $(0, \infty)$ și

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt.$$

Soluție. Din exercițiul 7.3.5. deducem că funcția Γ este bine definită. Notând $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$, $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1} e^{-t} \ln t, (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

și că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$, fiind produs de funcții continue.

Fie acum $a, b \in (0, \infty)$ arbitrare, fixate. Demonstrăm că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ este uniform convergentă pe $[a, b]$. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm convergența uniformă a integralelor $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$ și $\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$ pe $[a, b]$. Dacă $x > 1$ prima integrală este o integrală simplă. Dacă $a < x \leq 1$, scriem:

$$t^{x-1} e^{-t} \ln t = \frac{t^{x-a} e^{-t} \ln t}{t^{\lambda}}, \text{ unde } \lambda = 1 - a < 1$$

Deoarece, pentru orice $x \in (a, 1]$ și $t \in (0, 1]$ avem:

$$|t^{x-1} e^{-t} \ln t| = -\frac{t^{x-a} e^{-t} \ln t}{t^{\lambda}} < \frac{1}{t^{\lambda}}$$

și $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\lambda}}$ este convergentă (deoarece $\lambda < 1$) deducem că $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$ este uniform convergentă. Pentru convergența celei de a doua integrale, se observă că:

$$t^{x-1} e^{-t} \ln t = \frac{t^{x+1} e^{-t} \ln t}{t^2} \leq M \cdot \frac{1}{t^2},$$

$x \in (a, b)$, $t \in [1, \infty)$, unde $M > 0$ este convenabil ales ($t^{x+1} e^{-t} \ln t < t^{b+1} e^{-t} \ln t$ iar $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{b+1} e^{-t} \ln t = 0$).

Cum $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$ este uniform convergentă pe (a, b).

Prin urmare, integrala $\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ este uniform convergentă pe (a, b). Aplicând teorema 7.1.16., deducem că funcția Γ este derivabilă cu derivata continuă pe (a, b). dar a, b fiind oarecare, deducem că Γ este derivabilă cu derivata continuă pe $(0, \infty)$ și avem :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, x \in (0, \infty).$$

Exercițiul 7.2.6. Folosind funcțiile “beta” și “gama” , să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0$

b) $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0.$

Soluție. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx &= \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}} (1-t)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right). \end{aligned}$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obținem :

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{p}{q}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{q} \cdot t^{\frac{1}{q}-1} dt = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

Exercițiul 7.3.13. Utilizând teorema 7.1.17., să se calculeze

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt .$$

Soluție. Deoarece $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} = 0$, integrala este improprie doar în limita superioară. Deoarece $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} = 0$ rezultă că $\left| \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} \right| \leq M \cdot e^{-t}$, cu $M > 0$ convenabil ales, iar $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$ este convergentă, rezultă că integrala dată este absolut convergentă, deci și convergentă. Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{t} \Bigg|_{x=b}^{x=a} \cdot e^{-t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_b^a -\sin xtdx \right] \cdot e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-t} \sin xtdx \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[\int_0^{\infty} e^{-t} \sin xtdt \right] dx . \end{aligned}$$

Ultima egalitate a fost obținută în exercițiul precedent, utilizând teorema 7.1.17. Pentru $x \in [a, b]$ fixat, calculăm:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin xtdt &= - \int_0^{\infty} (e^{-t})' \sin xtdt = -e^{-t} \sin xt \Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} (\cos xt) xdt \\ &= -x \int_0^{\infty} (e^{-t})' \cos xtdt = -x \left[e^{-t} \cos xt \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-t} (-\sin xt) xdt \right] = \\ &= -x \left[-1 + x \int_0^{\infty} e^{-t} \sin xtdt \right] = x - x^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \sin xtdt . \end{aligned}$$

Prin urmare, $\int_0^{\infty} e^{-t} \sin xtdt = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in [a, b]$. Deci,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$$

Exercițiul 7.3.14. Fie $f: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin :

$$f(x, t) = \frac{x-t}{(x+t)^3} .$$

Demonstrați că : $\int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} f(x, t) dt \right] dx \neq \int_1^{\infty} \left[\int_1^{\infty} f(x, t) dx \right] dt .$

Soluție. Deoarece $|f(x, t)| \leq \frac{1}{t^2}$, pentru orice $(x, t) \in [1, \infty) \times [1, \infty)$, integrala $\int_1^\infty f(x, t) dt$ este uniform

convergentă în raport cu parametrul $x \in [1, \infty)$.

Prin calcul direct, obținem:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x, t) dt &= - \int_1^\infty \frac{t-x}{(t+x)^3} dt = - \int_1^\infty \frac{dt}{(t+x)^2} + 2x \int_1^\infty \frac{dt}{(t+x)^3} = \\ &= \frac{1}{t+x} \Big|_{t=1}^\infty - x \cdot \frac{1}{(t+x)^2} \Big|_{t=1}^\infty = -\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}, \end{aligned}$$

$x \in [1, \infty)$.

Prin urmare,

$$\int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x, t) dt \right] dx = \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=1}^\infty = -\frac{1}{2}.$$

Deoarece $|f(x, t)| \leq \frac{1}{x^2}$ pentru orice $(x, t) \in [1, \infty) \times [1, \infty)$, integrala $\int_1^\infty f(x, t) dt$ este uniform

convergentă în raport cu parametrul $t \in [1, \infty)$. Prin calcul direct, obținem:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x, t) dt &= \int_1^\infty \frac{x-t}{(x+t)^3} dx = \int_1^\infty \frac{dx}{(x+t)^2} - 2t \int_1^\infty \frac{dx}{(x+t)^3} = \\ &= -\frac{1}{x+t} \Big|_{x=1}^\infty + t \cdot \frac{1}{(x+t)^2} \Big|_{x=1}^\infty = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}, \end{aligned}$$

$t \in [1, \infty)$,

de unde $\int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x, t) dx \right] dt = \int_1^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} \Big|_1^\infty = \frac{1}{2}.$

Să observăm că funcția f nu păstrează un semn constant pe $[1, \infty) \times [1, \infty)$, deci teorema 7.1.18. nu este aplicabilă, chiar dacă toate celelalte ipoteze sunt satisfăcute.

Exercițiul 7.3.15. Utilizând teorema 7.1.17., să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$, integrala este improprie doar în limita superioară.

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, aplicând teorema 7.1.9., pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ și $l =$

$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, deducem că integrala este convergentă.

Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\frac{\arctg x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{x^2 t^2 + 1}, \quad x \in (0, \infty).$$

$$\text{Prin urmare } \int_0^1 \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{x^2 t^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2 t^2 + 1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx$$

Deoarece $\frac{1}{(x^2 t^2 + 1)\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru orice $(x, t) \in [0, 1) \times [0, 1)$ și $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 t^2 + 1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu parametrul t . Prin urmare, se poate schimba

ordinea de integrare și obținem :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctg x}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2 t^2 + 1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 t^2 + 1)\sqrt{1-x^2}} \right] dt = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+t^2 \sin^2 u} \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^\infty \frac{dv}{1+(1+t^2)v^2} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \arctg \left(v \cdot \sqrt{1+t^2} \right) \Big|_0^\infty \right] dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Exercițiul 7.3.16. Fie $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x, t) = x e^{-x^2(1+t^2)}$.

a) Demonstrați că $\int_a^\infty \left[\int_0^\infty f(x, t) dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_a^\infty f(x, t) dx \right] dt$, pentru orice

$a > 0$

b) Deduceți că $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x, t) dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x, t) dx \right] dt$

c) Demonstrați că: $\int_a^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala lui Euler-Poisson)

Soluție. a) Utilizând teorema 7.1.18., deoarece f este pozitivă și satisface condițiile:

- f este, evident, continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$;
- $\int_0^\infty f(x, t) dt$ este uniform convergentă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, deoarece $f(x, t) \leq$

$$\beta e^{-\alpha^2(1+t^2)}, \quad x \in [\alpha, \beta], \quad t \in [0, \infty) \text{ iar } \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \text{ este convergentă}$$

- $\int_a^\infty f(x, t) dx$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$ deoarece $f(x, t) \leq x e^{-x^2}$, pentru orice

$$x \in [a, \infty), t \in [0, \infty), \text{ iar integrala } \int_a^\infty x e^{-x^2} \text{ este convergentă;}$$

- $\int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t) dx \right] dt$, $a > 0$, este convergentă deoarece:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t) dx \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)} dt,$$

$$\frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)} < \frac{1}{2(1+t^2)}, t \in [0, \infty) \text{ și}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \arctgt \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă: $\int_a^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t) dx \right] dt$ pentru orice $a > 0$.

b) Deoarece $g(a, t) = \int_a^{\infty} f(x,t) dx = \frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)}$, $a \in [0, \infty)$, $t \in [0, \infty)$ este continuă, iar

integrala $\int_0^{\infty} g(a,t) dt$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$, fiind majorată de integrala improprie

convergentă $\int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}$, rezultă că $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\int_a^{\infty} f(x,t) dx \right] dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} g(a,t) dt = \int_0^{\infty} g(0,t) dt =$

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dx \right] dt.$$

Trecând acum la limită când $a \rightarrow 0$ în egalitatea stabilită la a) rezultă:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dt \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dx \right] dt.$$

c) Evaluăm pe rând integralele care apar în egalitatea stabilită la punctul b):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dt \right] dx &= \int_0^{\infty} \left[x e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t^2} dt \right] dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right). \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x,t) dx \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \arctgt \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Prin urmare $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$, de unde rezultă imediat egalitatea cerută.

Exercițiul 7.3.17. Folosind funcțiile “beta” și “gama”, să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0$

b) $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0.$

Soluție. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx &= \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}} (1-t)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right). \end{aligned}$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obținem :

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{p}{q}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{q} \cdot t^{\frac{1}{q}-1} dt = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.3. Exerciții propuse

Exercițiul 7.3.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii și să se determine valorile acestora, în caz de convergență:

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cdot \cos bxdx, a > 0, b \in \mathbb{R}$

b) $\int_0^{3/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

c) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^n dx, n \in \mathbb{N}$

d) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} dx, n \in \mathbb{N}$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

f) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx$

g) $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$.

R. a) $\frac{a}{a^2 + b^2}$; b) divergentă, deoarece nu există $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cos \frac{1}{x}$;

c) notând integrala cu I_n , se obține, integrând prin părți, $I_n = nI_{n-1}$ de unde $I_n = n!$;

d) cu substituția $x^2 = t$, utilizând integrala precedentă, se obține $\frac{n!}{2}$;

e) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; f) $-\frac{1}{8}$;

g) cu substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$, utilizând exercițiul 9.3.3., se obține $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Exercițiul 7.3.2. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

b) $\int_2^{\infty} |x-3| \cdot e^{-x} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

R. a) π ; b) $\frac{2}{e^3}$; c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$; d) π .

Exercițiul 7.3.3. Să se demonstreze că următoarele integrale improprii sunt convergente și să se determine valorile acestora:

a) $\int_0^1 \ln x dx$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

d) $\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx$

R. a) - 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π ; d) $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$ (se face schimbarea $x = \pi - t$ și se ținea seama de exercițiul 7.3.3.)

Exercițiul 7.3.4. Fie $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\Gamma(x) = \int_1^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$. Demonstrați că $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, pentru orice $x > 0$ și deduceți că $\Gamma(n+1) = n!$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exercițiul 7.3.5. Fie $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

(vezi exercițiul 7.3.6.)

a) Utilizând schimbarea de variabilă $t = \frac{u}{1+u}$, demonstrați că

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du;$$

b) Demonstrați că $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$;

c) Demonstrați că $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ și deduceți că $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercițiul 7.3.6. Folosind funcțiile B (“beta”) și Γ (“gama”), să se calculeze:

a) $\int_1^\infty x^p \ln^q x dx$, $p, q > -1$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx$, $p, q > -1$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, $m > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

R. a) $\frac{(-1)^{q+1}}{(p+1)^{q+1}} \cdot \Gamma(q+1)$; b) $\frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$;

c) $x = t^{\frac{1}{m}}$; $\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1\right)$.

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

8.1.1. Drumuri și curbe în \mathbb{R}^p

Definiția 8.1.1.1. Se numește *drum* în \mathbb{R}^p orice funcție continuă

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Dacă $f_1, f_2, \dots, f_p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt componentele lui γ , atunci egalitățile

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \cdot \\ x_p = f_p(t) \end{cases}, t \in [a, b] \text{ se numesc } \textit{ecuațiile parametrice} \text{ ale drumului } \gamma.$$

Imaginea drumului γ se notează (γ) și este :

$$(\gamma) = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)), t \in [a, b]\}.$$

Ea este o submulțime a lui \mathbb{R}^p

Punctele $\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ se numesc *capetele drumului* γ .

Drumul $\gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ definit prin $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$ se numește *opulul lui* γ .

Observația 8.1.1.1. Evident $\gamma(a) = \gamma^*(b)$, $\gamma(b) = \gamma^*(a)$ și $(\gamma) = (\gamma^*)$

Definiția 8.1.1.2. Dacă $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^p$ sunt două drumuri și $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^p$ definit prin:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), t \in [b, c] \end{cases}$$

se numește *juxtapunerea drumurilor* γ_1 și γ_2 .

Observația 8.1.1.2. Imaginea drumului $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumului γ_1 și γ_2 .

Definiția 8.1.1.3. Un drum $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ se numește *neted* dacă funcția γ este de clasă C^1 pe $[a, b]$ și $\gamma'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ pentru orice $t \in [a, b]$. Drumul γ se numește *neted pe porțiuni* dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Definiția 8.1.1.4. Două drumuri netede $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^p$ se numesc *echivalente, cu aceeași orientare*, dacă există $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ astfel încât:

1. h este de clasă C^1 pe $[a, b]$
2. h este bijectivă;
3. h este strict crescătoare ;
4. $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Observația 8.1.1.3. a) Orice două drumuri echivalente au aceeași imagine, dar reciproca afirmației nu este adevărată, adică există drumuri având aceeași imagine și care nu sunt echivalente (de exemplu $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, t)$ și $\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t^2, t^2)$).

b) Faptul că h este strict crescătoare corespunde intuitiv faptului că imaginile lor sunt parcurse în același sens, ceea ce explică folosirea cuvintelor “cu aceeași orientare” în definiția precedentă. Dacă h este strict descrescătoare, atunci γ_1 este echivalent cu γ_2^* .

c) Relația binară obținută pe mulțimea drumurilor netede prin definiția 8.1.1.4. este o relație de echivalență.

Definiția 8.1.1.5. Se numește *curbă* în \mathbb{R}^p o clasă de drumuri echivalente din \mathbb{R}^p . *Imaginea* curbei este imaginea oricărui drum conținut în curbă.

Observația 8.1.1.4. Deseori se folosește noțiunea de curbă în sensul de imagine a sa, care este o submulțime din \mathbb{R}^p , ceea ce explică următoarele afirmații privind:

a) *Curbe în \mathbb{R}^2 .*

- Dacă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este un drum neted în \mathbb{R}^2 , cu componentele

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ se spune că egalitățile } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [a, b] \end{cases} \text{ sunt ecuațiile parametrice ale}$$

curbei din care face parte drumul γ

- Dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, atunci se spune că $y = \varphi(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ este *ecuația explicită* a curbei din care face parte drumul γ .
- Dacă $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^2$ și ecuația $F(x, y) = 0$ definește (local) implicit pe y ca funcție de x , se spune că $F(x, y) = 0$ este *ecuația implicită* a unei curbe în \mathbb{R}^2 .

b) *Curbe în \mathbb{R}^3 .*

- Dacă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ este un drum neted în \mathbb{R}^3 , cu componentele $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se spune că

$$\text{egalitățile } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), t \in [a, b] \end{cases} \text{ sunt ecuațiile parametrice ale curbei din care face parte drumul}$$

γ .

- Dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t), \psi(t))$, atunci se spune că $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x), x \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ sunt *ecuațiile explicite* ale curbei din care face parte drumul γ .
- Dacă $F, G : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^3$ și sistemul $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ definește (local) implicit pe y și z ca funcții de x , se spune că $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ sunt *ecuațiile implicite* ale unei curbe în \mathbb{R}^3 .

8.1.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum.

Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum în \mathbb{R}^3 și Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ determinată de $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Punctele $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$ determină o linie poligonală ale cărei vârfuri aparțin imaginii lui γ .

Lungimea acestei linii poligonale este:

$$l_{\Delta} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2 + [h(t_i) - h(t_{i-1})]^2}$$

și crește dacă diviziunea Δ este înlocuită cu o diviziune mai fină.

Definiția 8.1.2.1. Drumul γ se numește *rectificabil* dacă mulțimea $\{l_{\Delta} : \Delta \text{ este o diviziune a lui } [a, b]\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea drumului γ și se notează l_{γ} .

Teorema 8.1.2.1. Dacă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum neted, atunci γ este rectificabil și

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Pentru calculul lungimii unui drum neted se pot folosi și următoarele formule:

- Dacă γ este dat de ecuațiile explicite $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2} dx$
- Dacă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ este un drum neted, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$
- Dacă γ este un drum neted dat prin ecuația explicită $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Teorema 8.1.2.2. Un drum echivalent cu un drum rectificabil γ este rectificabil și are aceeași lungime cu γ .

Observația 8.1.2.1. Din teorema anterioară rezultă că toate drumurile ce aparțin unei curbe netede au aceeași lungime, care va fi numită *lungimea curbei*.

8.1.3. Integrala curbilinie de primul tip

Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted și $F : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară. Pentru o diviziune d a intervalului $[a, b]$ determinată de $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ se notează cu l_i lungimea arcului de extremități $\gamma(t_{i-1})$ și $\gamma(t_i)$, iar $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ este un sistem de puncte intermediare.

Funcției F , diviziunii d și sistemului θ de puncte intermediare i se asociază suma:

$$\sigma(F, d, \theta) = \sum_{i=1}^n F(\gamma(\theta_i)) \cdot l_i$$

Definiția 8.1.3.1. Funcția F se numește *integrabilă în raport cu arcul* pe drumul γ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca, pentru orice diviziune d a lui $[a, b]$ cu $\|d\| < \delta$ și orice sistem de puncte intermediare θ să avem:

$$|\sigma(F, d, \theta) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I se numește *integrala curbilinie în raport cu arcul* sau *integrala curbilinie de primul tip* a funcției F pe drumul γ și se notează:

$$I = \int_{\gamma} F(x, y, z) dl$$

Observația 8.1.3.1. a) Dacă $F(x, y, z) = 1$, pentru orice $(x, y, z) \in (\gamma)$, rezultă imediat că numărul I este tocmai l_γ a arcului (γ) . Deci $l_\gamma = \int_{\gamma} dl$.

b) Se poate demonstra că dacă γ_1 și γ_2 sunt două drumuri echivalente și F este integrabilă în raport cu arcul pe γ_1 , atunci ea este integrabilă și pe γ_2 și cele două integrale coincid. De aici rezultă că, dacă F este integrabilă în raport cu arcul pe un drum γ , atunci ea este integrabilă pe orice drum din curba din care face parte γ și valoarea integralei este aceeași. Aceasta justifică denumirea de integrală curbilinie (sau integrală pe curba din care face parte γ).

Teorema 8.1.3.1. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted de ecuații $x = f(t)$,

$y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$ și F o funcție continuă pe un domeniu ce conține imaginea lui γ . Atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe drumul γ și

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Observația 8.1.3.2. Dacă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este un drum neted de ecuații

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$ și $F : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe γ și

$$\int_{\gamma} F(x, y) dl = \int_a^b F(f(t), g(t)) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Teorema 8.1.3.2. (Proprietăți ale integralei curbilinii de primul tip)

Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted, $F, G : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Atunci:

$$\int_{\gamma} (\alpha F(x, y, z) + \beta G(x, y, z)) dl = \alpha \int_{\gamma} F(x, y, z) dl + \beta \int_{\gamma} G(x, y, z) dl \text{ (liniaritate)}$$

- Dacă $F(\gamma(t)) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$, atunci

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) dl \geq 0 \quad (\text{monotonie})$$

- $\left| \int_{\gamma} F(x, y, z) dl \right| \leq \int_{\gamma} |F(x, y, z)| dl$ (estimarea modulului integralei)

- Există $t^* \in [a, b]$ astfel încât $\int_{\gamma} F(x, y, z) dl = F(\gamma(t^*)) \cdot l_{\gamma}$, unde l_{γ} este lungimea drumului γ

(formula de medie)

- $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F(x, y, z) dl = \int_{\gamma_1} F(x, y, z) dl + \int_{\gamma_2} F(x, y, z) dl$ (aditivitate față de drum)

- $\int_{\gamma} F(x, y, z) dl = \int_{\gamma^*} F(x, y, z) dl$ (independența de orientare)

8.1.4. Aplicații ale integralei curbilinii de primul tip

8.1.4.1. Lungimea unei curbe

Curba reprezentată de drumul neted γ de ecuații $x = f(t)$, $y = g(t)$,

$z = h(t)$, $t \in [a, b]$ are lungimea $l_{\gamma} = \int_{\gamma} dl$.

8.1.4.2. Masa unui fir material

Dacă imaginea (γ) a drumului neted γ modelează un fir material, iar $\rho : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă care asociază fiecărui punct

$(x, y, z) \in (\gamma)$ densitatea $\rho(x, y, z)$ a firului în acel punct, atunci masa firului este $m = \int_{\gamma} \rho(x, y, z) dl$

8.1.4.3. Centrul de greutate al unui fir material

Coordonatele centrului de greutate al firului (γ) a cărui densitate în punctul (x, y, z) este $\rho(x, y, z)$ sunt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x\rho(x, y, z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z)dl} ; y_G = \frac{\int_{\gamma} y\rho(x, y, z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z)dl} ; z_G = \frac{\int_{\gamma} z\rho(x, y, z)dl}{\int_{\gamma} \rho(x, y, z)dl}$$

8.1.4.4. Momentele de inerție ale unui fir material

Momentele de inerție ale firului material (γ), având densitatea $\rho(x, y, z)$ în punctul (x, y, z) , în raport cu axele Ox , Oy , Oz sunt:

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl ;$$

$$I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl ;$$

$$I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dl$$

8.1.4.5. Atracția exercitată asupra unui punct material de către un fir material

Punctul material $M(x_0, y_0, z_0)$ având masa m_0 , este atras de firul material (γ), cu densitatea $\rho(x, y, z)$ în punctul (x, y, z) , cu o forță ale cărei componente sunt:

$$F_x = km_0 \int_{\gamma} \frac{(x - x_0)\rho(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} dl ;$$

$$F_y = km_0 \int_{\gamma} \frac{(y - y_0)\rho(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} dl ;$$

$$F_z = km_0 \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)\rho(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} dl .$$

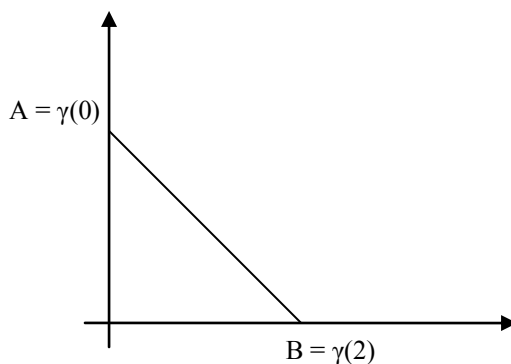
Aici k este o constantă ce depinde de alegerea unităților de măsură.

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 8.2.1. Să se calculeze $\int_{\gamma} xy dl$, unde γ este dată de $x = t$,
 $y = 2 - t$, $t \in [0, 2]$

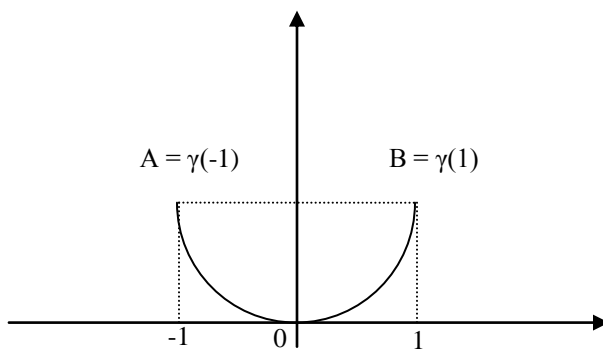
Soluție.



$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xy dl &= \int_0^2 t(2-t)\sqrt{1^2 + (-1)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^2 (2t - t^2) dt = \\ &= \sqrt{2} \left(t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \sqrt{2} \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Exercițiul 8.2.2. Să se calculeze $\int_{\gamma} xy dl$ unde γ este dată de $y = x^2$,
 $x \in [-1, 1]$.

Soluție.



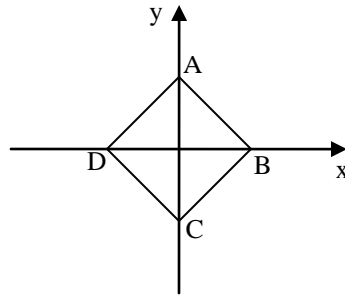
Ecuatiile parametrice ale lui γ sunt $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, t \in [-1, 1] \end{cases}$.

Deci $\int_{\gamma} xydl = \int_{-1}^1 t^3 \sqrt{1^2 + (2t)^2} dt = 0$ (deoarece se integrează o funcție impară pe un interval simetric față de 0)

Exercițiul 8.2.3. Să se calculeze $\int_{\gamma} xydl$ unde $\gamma : |x| + |y| = a, a > 0$

Soluție. Imaginea drumului γ este prezentată în figura următoare. Se observă că ea este reuniunea imaginii a patru drumuri:

$$\begin{array}{ll} \text{AB: } \begin{cases} x = t \\ y = a - t, t \in [0, a] \end{cases} & \text{CB: } \begin{cases} x = t \\ y = t - a, t \in [0, a] \end{cases} \\ \text{DC: } \begin{cases} x = t \\ y = -t - a, t \in [-a, 0] \end{cases} & \text{DA: } \begin{cases} x = t \\ y = a + t, t \in [-a, 0] \end{cases} \end{array}$$



$$\begin{aligned} \text{Rezultă } \int_{\gamma} xydl &= \int_{AB} xydl + \int_{BC} xydl + \int_{CD} xydl + \int_{DA} xydl = \\ &= \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2 + (-1)^2} dt + \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2 + 1^2} dt - \\ &- \int_{-a}^0 t(-t-a)\sqrt{1^2 + (-1)^2} dt + \int_{-a}^0 t(a+t)\sqrt{1^2 + 1^2} dt = \\ &= \sqrt{2} \left[\int_0^a t(a-t)dt + \int_0^a t(a-t)dt + \int_{-a}^0 t(a+t)dt + \int_{-a}^0 t(a+t)dt \right] = 0 \end{aligned}$$

Exercițiul 8.2.4. Să se calculeze $\int_{\gamma} (x + y)dl$ unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ aflată în cadranele I și IV.

Soluție. Înlocuim x și y în ecuația implicită prin $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Rezultă $r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2r^2\cos 2\theta$, adică $r^2 = a^2\cos 2\theta$. Din condiția $\cos 2\theta \geq 0$ rezultă $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (ținând cont și de faptul că interesează bucla din cadranele I și IV)

Rezultă și $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, deci ecuațiile parametrice sunt:

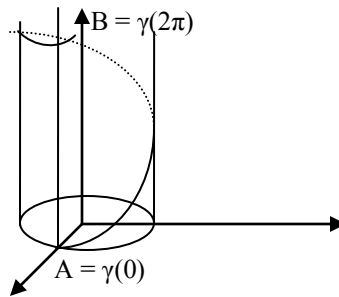
$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos \theta \\ y = a\sqrt{\sin 2\theta} \cdot \sin \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Atunci } \int_{\gamma} (x + y) dl &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos \theta + a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin \theta) \cdot \\ &\cdot \sqrt{\left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos \theta \right)' \right]^2 + \left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin \theta \right)' \right]^2} d\theta = \\ &= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos \theta \sqrt{\cos 2\theta} + \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\left[\sqrt{\cos 2\theta} \right]^2 + \left[\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \right]^2} d\theta = \\ &= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos \theta \sqrt{\cos 2\theta} + \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} d\theta = \\ &= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin \theta + \cos \theta) d\theta = a^2 (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercițiul 8.2.5. Să se calculeze $I = \int_{\gamma} (x + y + z) dl$, unde γ este dată de $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x + y + z) dl &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \cdot \sqrt{\left[(\cos t)' \right]^2 + \left[(\sin t)' \right]^2 + [t']^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(\sin t - \cos t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \sqrt{2} \end{aligned}$$



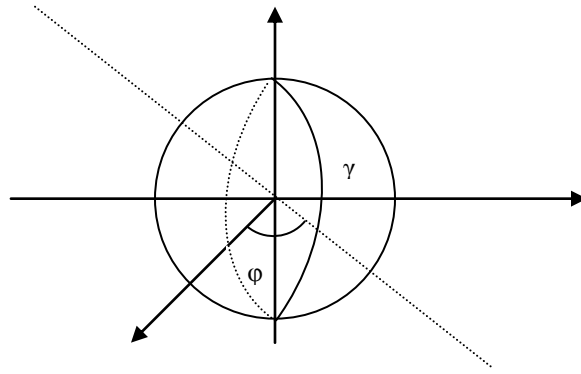
Imaginea curbei γ este reprezentată în figură.

Exercițiul 8.2.6. Să se calculeze $\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, unde γ este circumferința cercului de ecuație

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}.$$

Soluție. Cercul γ este intersecția sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul de ecuație $x = y$.

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



Ecuțiile parametrice ale curbei sunt obținute cu ajutorul ecuațiilor parametrice ale sferei:

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cos \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad \text{ținând cont că din condiția } x = y \text{ rezultă } \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ sau } \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

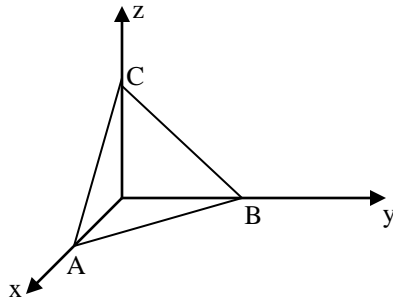
$$\text{Rezultă } \gamma : \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ z = a \cos \theta, \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ y = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ z = a \cos \theta, \theta \in [0, \pi] \end{cases}.$$

$$\text{Deci } x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta, y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta, z = a \cos \theta, \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă } \int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \theta \right)^2 + (a \cos \theta)^2} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^2 \end{aligned}$$

Exercițiul 8.2.7. Să se calculeze $\int_{\gamma} (x + y + z) dl$ unde γ este triunghiul cu vârfurile în $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Soluție. Se observă că γ este reuniunea a trei drumuri:



$$AB: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

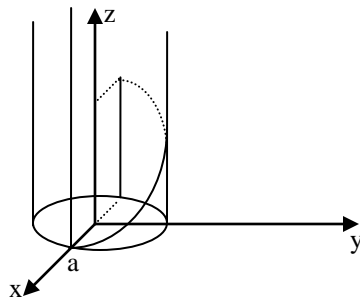
$$BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t, t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$CA: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t, t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă } \int_{\gamma} (x + y + z) dl &= \int_0^1 (t + 1 - t) \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} dt + \\ &+ \int_0^1 (t + 1 - t) \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} dt + \int_0^1 (t + 1 - t) \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} dt \\ &= 3 \int_0^1 \sqrt{2} dt = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercițiul 8.2.8. Să se calculeze lungimea curbei γ definită prin reprezentarea parametrică: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$

Soluție. Curba este o elice circulară a cărei imagine este prezentată în figura alăturată.



Lungimea sa este:

$$l_{\gamma} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercițiul 8.2.9. Să se determine masa și coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei $\gamma : x = 4t^5; y = \sqrt{15} t^4; z = 2t^3, t \in [-1, 1]$ dacă densitatea în punctul (x, y, z) este $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2} |z|$.

Soluție.

$$m = \int_{\gamma} \frac{1}{2} |z| dl = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} |2t^3| \sqrt{(20t^4)^2 + (4\sqrt{15}t^3)^2 + (6t^2)^2} dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot 2 |t^3| t^2 (20t^2 + 6) dt = 2 \int_0^1 t^5 (20t^2 + 6) dt = \left(\frac{40t^8}{8} + \frac{12t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 5 + 2 = 7$$

Coordonatele centrului de greutate sunt :

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x \cdot \frac{1}{2} |z| dl}{7} = \frac{\int_{-1}^1 4t^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |t^3| \cdot t^2 (20t^2 + 6) dt}{7} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{\gamma} y \cdot \frac{1}{2} |z| dl}{7} = \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{15} t^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |t^3| \cdot t^2 (20t^2 + 6) dt}{7} = \frac{68\sqrt{15}}{105}$$

$$z_G = \frac{\int_{\gamma} z \cdot \frac{1}{2} |z| dl}{7} = \frac{\int_{-1}^1 2t^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |t^3| \cdot t^2 (20t^2 + 6) dt}{7} = 0$$

Exercițiul 8.2.10. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Oz a primei spirale a elicei $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$, având densitatea constantă ρ .

Soluție. $I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dl = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \cdot$

$$\cdot \rho \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = 2\pi a^2 \cdot \rho \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exercițiul 8.2.11. Să se determine atracția exercitată de arcul de astroidă

$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ situat în primul cadran, asupra unității de măsură situată în originea coordonatelor, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu cubul distanței de la punct la originea coordonatelor.

Soluție.

$$F_x = k \cdot 1 \cdot \int_{\gamma} \frac{x \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} dl =$$

$$= k \int_0^{\pi/2} a \cos^3 t \sqrt{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= k \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos^4 t dt = -k3a \frac{\cos^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ak}{5}.$$

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.3. Exerciții propuse

Exercițiul 8.3.1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_{\gamma} xy dl$; $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, 1 - t)$;

b) $\int_{\gamma} (x + y^2) dl$; $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$;

c) $\int_{\gamma} 4x^6 y dl$; $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t, e^{-t})$;

d) $\int_{\gamma} y^2 dl$; $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$;

e) $\int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$; γ este segmentul de dreaptă ce unește punctele

O(0, 0) și A(1, 2);

f) $\int_{\gamma} xy dl$; γ este porțiunea din elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situată în cadrantul I;

g) $\int_{\gamma} |xy| dl$; γ este cercul $x^2 + y^2 = 1$;

h) $\int_{\gamma} xy^3 dl$; γ este porțiunea astroidei $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ situată în cadranele I și IV;

i) $\int_{\gamma} 2y^2 dl$; $\gamma : y = e^x$, $x \in [0, 1]$;

j) $\int_{\gamma} (x + y^2) dl$; γ este pătratul cu vârfurile în A(a, a), B(-a, a), C(-a, -a), D(a, -a).

R. a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{2}{3} \left(\sqrt{(e^8 + 1)^3} - \sqrt{2^3} \right)$; d) $\frac{256}{15}$; e) $\ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$;

f) $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$; g) 2; h) 0; i) $\frac{2}{3} \left(\sqrt{(e^2 + 1)^3} - \sqrt{2^3} \right)$; j) $\frac{16a^3}{3}$.

Exercițiul 8.3.2. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\int_{\gamma} z(x^2 + y^2) dl$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$;

b) $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) \ln z dl$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$;

c) $\int_{\gamma} (x^2 - y^2 + z^2) dl$, γ este juxtaponerea curbelor

$$\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t, 0) \text{ și}$$

$$\gamma_2 : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma_2(t) = (0, R - t, t);$$

- d) $\int_{\gamma} \sqrt{y^2 + \frac{z^2}{2}} dl$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$;
- e) $\int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{1 + 2(2z - z^2)}}$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$;
- f) $\int_{\gamma} (x + yz) dl$, $\gamma: \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3, x \in [-1, 1] \end{cases}$;
- g) $\int_{\gamma} (x^2 - y^2) dl$, γ este curba de ecuație $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 0, x \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$
- R. a) $\frac{-\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$; b) $\frac{1 + 2e^3}{3\sqrt{3}}$; c) $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R^3$; d) $4\pi\sqrt{2}$;
- e) $\pi\sqrt{2}$; f) 0; g) $\frac{2}{3}(\sqrt{2^3} - \sqrt{3^3})$.

Indicații. d) ecuațiile parametrice sunt $x = \sqrt{2} \sin \theta$,

$y = -\sqrt{2} \sin \theta$, $z = 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

e) Ecuațiile parametrice sunt: $x = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \cos^2 \theta$,

$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin^2 \theta$, $z = 1 + \sin 2\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$;

g) Ecuațiile parametrice sunt: $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = \sin \theta - \cos \theta$,

$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercițiul 8.3.3. Să se calculeze lungimile următoarelor curbe:

a) $x = ae^{kt} \cos t$, $y = ae^{kt} \sin t$, $z = ae^{kt}$, $t \in [0, 1]$, $a > 0$, $k > 0$.

b) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$, $z = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg} t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$;

c) $x = t$, $y = \ln \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$;

d) $y = \arcsin e^{-x}$, $x \in [0, 1]$;

e) $y = \frac{1}{2} x^2$; $x \in [0, 1]$;

f) $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$; $\theta \in [0, 2\pi]$;

g) $\theta = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right)$, $r \in [1, 3]$;

h) $r = |\sin \theta|$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

i) $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

R. a) $\frac{a}{k} \sqrt{1 + 2k^2} (e^k - 1)$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) $2 \ln(1 + \sqrt{2})$;

d) $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$; e) $\frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$; f) $\frac{a}{8}(8\pi - 3\sqrt{3})$;

g) $2 + \frac{1}{2}\ln 3$; h) 2π ; i) $16a$.

Exercițiul 8.3.4. Să se calculeze masa segmentului elipsei $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, cu $b > a > 0$, situat în primul cadran, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu ordonata punctului.

R. $\frac{a^2 b}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} + \frac{b^2}{2}$.

Exercițiul 8.3.5. Să se calculeze masa primei spirale a elicei $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ (cu $a, b > 0$) a cărei densitate în fiecare punct este egală cu pătratul razei polare a punctului.

R. $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2)$.

Exercițiul 8.3.6. Să se găsească masa arcului $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, 1]$ dacă densitatea în fiecare punct este invers proporțională cu pătratul razei polare a punctului și este egală cu unitatea în punctul $(1, 0, 1)$.

R. $\sqrt{3}(1 - \frac{1}{e})$.

Exercițiul 8.3.7. Să se calculeze masa arcului $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$,

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, omogen cu densitatea 1.

R. $\frac{3a}{2}$

Exercițiul 8.3.8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y) = \sqrt{y}$.

R. $x_G = \pi$, $y_G = \frac{3}{2}$.

Exercițiul 8.3.9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$,

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dacă $\rho(x, y) = 1$.

R. $x_G = y_G = \frac{4}{5}$.

Exercițiul 8.3.10. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$ dacă $\rho(x, y, z) = 1$.

R. $x_G = y_G = 0$, $z_G = 2\pi$

Exercițiul 8.3.11. Să se calculeze momentul de inerție față de axa Oz al firului $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z =$

e^t , $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, având densitatea constantă ρ .

$$\mathbf{R.} \ I_z = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}(e^\pi - 1)$$

Exercițiul 8.3.12. Să se determine momentele de inerție față de axele de coordonate ale firului material $x =$

$\cos t, y = \sin t, z = t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ având densitatea $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\mathbf{R.} \ I_z = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}(12 + \pi^2), I_y = \frac{\pi\sqrt{2}}{160}(20 + 10\pi + \pi^4),$$

$$I_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{160}(60 + 10\pi + \pi^4).$$

Exercițiul 8.3.13. Să se determine atracția exercitată de un semicerc omogen asupra unității de masă plasată în centrul său.

$$\mathbf{R.} \ F_x = 0, F_y = 2\rho \cdot k.$$

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.1. Noțiuni teoretice fundamentale

9.1.1. Definiția și proprietățile integralei duble

Definirea integralelor duble și a funcțiilor integrabile de două variabile, se face prin generalizarea rezultatelor din 6. Intervalul compact

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ este înlocuit cu un domeniu compact măsurabil Jordan din \mathbb{R}^2 , deoarece acesta are proprietățile de bază ale intervalelor compacte din \mathbb{R} .

Reamintim că o mulțime deschisă și conexă se numește *domeniu*. Aderența unui domeniu se numește *domeniu închis*. Un domeniu închis și mărginit din \mathbb{R}^2 se numește *domeniu compact*. Un domeniu compact din \mathbb{R}^2 a cărui frontieră este imaginea unei curbe netede pe porțiuni, este *măsurabil Jordan (are arie)*.

În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiția 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil. Se numește *diviziune* a domeniului D , o familie finită $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ de mulțimi cu următoarele proprietăți:

a) fiecare mulțime D_i este domeniu compact măsurabil;

b)
$$\bigcup_{i=1}^n D_i = D;$$

c) dacă $i \neq j$; atunci $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$. ($\overset{\circ}{D}_i$ reprezintă interiorul mulțimii D_i)

Se numește *norma diviziunii* d , numărul:

$$\|d\| = \max \{d(D_i); i=1, 2, \dots, n\}$$

unde $d(D_i)$ este diametrul mulțimii D_i .

Notăm cu \mathcal{D} mulțimea tuturor diviziunilor domeniului D .

Definiția 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan și

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită, fie $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D . Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fie $m_i = \inf f(D_i)$ și

$M_i = \sup f(D_i)$. Suma $s_f(d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot a(D_i)$ se numește *suma inferioară Darboux* asociată funcției f și

diviziunii d , iar suma $S_f(d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot a(D_i)$ se numește *suma superioară Darboux* (cu $a(D_i)$ s-a notat aria

domeniului D_i). Se numește *integrala inferioară Darboux* a funcției f pe domeniul D , numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

iar numărul :

$$\bar{I} = \inf \{S_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

se numește *integrala superioară Darboux* a funcției f pe domeniul D . Funcția f se numește *integrabilă pe domeniul D în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numește *integrala dublă a funcției f pe domeniul compact D în sensul lui Darboux*.

Definiția 9.1.1.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară; fie $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D . Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fie $\xi_i \in D_i$, arbitrar; mulțimea de puncte

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ se numește *sistem de puncte intermediare*. Suma

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot a(D_i)$$

se numește *suma Riemann* a funcției f corespunzătoare diviziunii d și sistemului ξ de puncte intermediare. Funcția f se numește *integrabilă pe domeniul compact D în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ și pentru orice sistem ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real I , a cărei unicitate se dovedește imediat, se numește *integrala funcției f în sensul lui Riemann, pe domeniul compact D* .

Observația 9.1.1.1. În definiția 9.1.1.3. nu este necesar să presupunem funcția f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul D are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că *orice funcție integrabilă Riemann pe un asemenea domeniu este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcții mărginite.

Teorema 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) f este integrabilă în sens Darboux pe D ;
- b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
- c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
- d) f este integrabilă în sens Riemann pe D .

În acest caz $I = \underline{I} = \bar{I}$; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcții integrabile pe domeniul compact D și la integrale duble, fără a mai preciza sensul și vom nota:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Cea mai importantă consecință a teoremei precedente este integrabilitatea funcțiilor continue.

Teorema 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Dacă mulțimea $D_1 \subset D$ a punctelor de discontinuitate ale funcției f este de măsură Jordan nulă (de arie nulă) atunci f este integrabilă pe D .

La fel ca și în cazul integralei simple, se demonstrează următoarele proprietăți:

Teorema 9.1.1.3. (Proprietatea de liniaritate)

Dacă f_1 și f_2 sunt funcții integrabile pe domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ și $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ atunci funcția $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este integrabilă pe D și are loc egalitatea:

$$\iint_D (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x, y) dx dy = \lambda_1 \iint_D f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \iint_D f_2(x, y) dx dy$$

Teorema 9.1.1.4. (Proprietatea de aditivitate față de domeniu)

Dacă $D_1, D_2, D_1 \cup D_2$ sunt domenii compacte măsurabile, atunci funcția mărginită f este integrabilă pe $D_1 \cup D_2$ dacă și numai dacă f este integrabilă pe D_1 și pe D_2 ; dacă în plus, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Teorema 9.1.1.5. (Proprietatea de monotonie)

Dacă f_1 și f_2 sunt funcții integrabile de domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ și pentru orice $(x, y) \in D$, avem $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ atunci:

$$\iint_D f_1(x, y) dx dy \leq \iint_D f_2(x, y) dx dy$$

Teorema 9.1.1.6. Dacă funcția f este integrabilă pe D , atunci și $|f|$ este integrabilă pe D și are loc inegalitatea:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

Teorema 9.1.1.7. (Formula de medie pentru integrala dublă)

Dacă funcția f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil D și $m = \inf f(D)$, $M = \sup f(D)$ atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \mu \cdot a(D).$$

Dacă f este continuă pe D , atunci există $(\xi, \tau) \in D$ încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \tau) \cdot a(D).$$

9.1.2. Calculul integralelor duble

Teorema 9.1.2.1. Fie $D = [a, b] \times [c, d]$ și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe D . Dacă pentru fiecare $x \in [a, b]$ există

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

atunci funcția $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx,$$

care se mai scrie

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Observația 9.1.2.1. Schimbând în teoremă rolul variabilelor x și y obținem: dacă f este integrabilă pe D și dacă pentru fiecare $y \in [c, d]$ există

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \text{ atunci:}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy,$$

adică,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

În particular, dacă f este *continuă* pe D , atunci f este integrabilă pe D , există atât $F(x)$, $x \in [a, b]$, cât și $G(y)$, $y \in [c, d]$, prin urmare au loc ambele egalități, deci *ordinea de integrare nu contează*.

Teorema 9.1.2.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil, simplu față de axa Oy :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x); x \in [a, b]\},$$

unde $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^1 (orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte). Dacă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe D și pentru orice $x \in [a, b]$ funcția $y \rightarrow f(x, y)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ atunci funcția $\tilde{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \text{ este integrabilă pe } [a, b] \text{ și are loc egalitatea :}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \tilde{F}(x) dx, \text{ adică}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Observația 9.1.2.2. Dacă domeniul compact măsurabil D este simplu față de Ox , se stabilește un rezultat asemănător, schimbând rolul variabilelor x și y . Dacă D nu este în nici una din aceste situații, se descompune prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune și care să fie în una din situațiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate față de domeniu.

Teorema 9.1.2.3. (Teorema schimbării variabilelor în integrala dublă)

Fie $D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ domenii compacte măsurabile și $T: D^* \rightarrow D$ o transformare punctuală $(u, v) \xrightarrow{T} (x, y)$ cu jacobianul neutru în D^* și astfel încât $T(D^*) = D$. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Observația 9.1.2.3. Pentru aplicații, găsirea transformării T este esențială; nu există o metodă generală pentru rezolvarea acestei probleme ci, de la caz la caz, se alege transformarea T în funcție de forma ecuațiilor care definesc frontiera domeniului D . Alegerea este bună, dacă noul domeniu D^* este mai simplu, adică dacă integrala dublă pe D^* , obținută după aplicarea formulei, se descompune mai ușor în integrale simple.

9.1.3. Aplicații ale integralelor duble

9.1.3.1. Calculul ariilor

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact, a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de curbe netede, atunci *aria lui D* este:

$$a(D) = \iint_D dx dy$$

9.1.3.2. Calculul maselor și al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ reprezintă o placă materială (de grosime neglijabilă), iar funcția continuă $\rho: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea plăcii, atunci *masa plăcii* este dată de:

$$\text{masa}(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$$

iar *coordonatele centrului de greutate* al plăcii sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{\text{masa}(D)} \cdot \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{\text{masa}(D)} \cdot \iint_D y \rho(x, y) dx dy$$

9.1.3.3. Momente de inerție

Momentul de inerție al plăcii reprezentată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ față de originea axelor de coordonate este dat de:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy,$$

iar *momentele de inerție față de axele de coordonate* sunt:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy$$

9.1.4. Definiția și proprietățile integralei triple

Integrala triplă se definește la fel ca integrala dublă, domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind înlocuit cu un domeniu compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Reamintim că un domeniu compact din \mathbb{R}^3 a cărei frontieră este imaginea unei suprafețe netede pe porțiuni este măsurabil Jordan (are volum). În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiția 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil. Se numește *diviziune* a domeniului Ω , o familie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ de mulțimi cu următoarele proprietăți:

a) fiecare mulțime Ω_i este domeniu compact măsurabil;

b)
$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega;$$

c) dacă $i \neq j$, atunci $\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset$ ($\overset{\circ}{\Omega}_i$ reprezintă interiorul mulțimii Ω_i).

Se numește *norma diviziunii* d , numărul :

$$\|d\| = \max \{d(\Omega_i); i = 1, 2, \dots, n\},$$

unde $d(\Omega_i)$ reprezintă diametrul mulțimii Ω_i .

Notăm cu \mathcal{D} mulțimea tuturor diviziunilor domeniului Ω .

Definiția 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan și

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω . Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fie $m_i = \inf f(\Omega_i)$ și

$M_i = \sup f(\Omega_i)$ Suma $s_f(d) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v(\Omega_i)$ se numește *suma inferioară Darboux* asociată funcției f și diviziunii d , iar suma

$S_f(d) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot v(\Omega_i)$ se numește *suma superioară Darboux* (cu $v(\Omega_i)$ s-a notat volumul domeniului Ω_i).

Se numește *integrala inferioară Darboux* a funcției f pe domeniul Ω , numărul :

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

iar numărul

$$\bar{I} = \inf \{S_f(d); d \in \mathcal{D}\}$$

se numește *integrala superioară Darboux* a funcției f pe domeniul Ω . Funcția f se numește *integrabilă pe domeniul Ω în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numește *integrala triplă a funcției f pe domeniul compact Ω în sensul lui Darboux*.

Definiția 9.1.4.3. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil și $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω . Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fie $\xi_i \in \Omega_i$ arbitrar; mulțimea de puncte

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ se numește *sistem de puncte intermediare*. Suma:

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot v(\Omega_i)$$

se numește *suma Riemann* a funcției f corespunzătoare diviziunii d și sistemului ξ de puncte intermediare. Funcția f se numește *integrabilă pe domeniul compact Ω în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ și pentru orice sistem ξ de puncte intermediare, să avem:

$$|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I , a cărei unicitate se dovedește imediat, se numește *integrala funcției f în sensul lui Riemann pe domeniul compact Ω* .

Observația 9.1.4.1. În definiția 9.1.4.3. nu este necesar să presupunem funcția f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul Ω are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că orice *funcție integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcții mărginite.

Teorema 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil și $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) f este integrabilă în sens Darboux pe Ω ;
- b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
- c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
- d) f este integrabilă în sens Riemann pe Ω .

În caz de integrabilitate, $I = \underline{I} = \overline{I}$; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcții integrabile pe domeniul compact Ω și la integralele triple, fără a mai preciza sensul și vom nota :

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz .$$

Cea mai importantă consecință a teoremei precedente este integrabilitatea funcțiilor continue.

Teorema 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan și $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Dacă mulțimea $\Omega_1 \subset \Omega$ a punctelor de discontinuitate ale funcției f este de măsură Jordan nulă (de volum nul), atunci f este integrabilă pe Ω .

Proprietățile integralelor duble se reformulează pentru integralele triple. De exemplu:

Teorema 9.1.4.3. (*Formula de medie pentru integrala triplă*)

Dacă funcția f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil Ω și $m = \inf f(\Omega)$, $M = \sup f(\Omega)$, atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \mu \cdot v(\Omega).$$

Dacă f este continuă pe Ω , atunci există $(\xi, \tau, \zeta) \in \Omega$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \tau, \zeta) \cdot v(\Omega).$$

9.1.5. Calculul integralelor triple

Teorema 9.1.5.1. Fie $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ și $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe Ω . Fie $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dacă pentru fiecare $(x, y) \in D$ există:

$$F(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz ,$$

atunci funcția $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel definită este integrabilă pe D și are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D F(x, y) dx dy$$

care se mai scrie:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right] dx dy .$$

Observația 9.1.5.1. Schimbând în teoremă rolul variabilelor, se pot obține încă două formule analoage prin care calculul integralei triple pe un paralelipiped se reduce la calculul unei integrale duble și al uneia simple.

Teorema 9.1.5.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil, simplu față de axa Oz: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y); (x, y) \in D\}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind domeniu compact măsurabil, $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^1 pe D (orice paralelă la axa Oz intersectează frontiera lui Ω în cel mult două puncte). Dacă funcția $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe Ω și pentru orice $(x, y) \in D$ funcția $z \rightarrow f(x, y, z)$ este integrabilă pe intervalul

$[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, atunci funcția $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$\tilde{F}(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ este integrabilă pe D și are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \tilde{F}(x, y) dx dy$$

$$\text{adică : } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

Observația 9.1.5.2. Dacă domeniul compact măsurabil Ω este simplu față de Ox sau Oy, se stabilesc două formule asemănătoare, schimbând rolul variabilelor. Dacă Ω nu este în nici una din aceste situații, se descompune într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune și care să fie în una din situațiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate față de domeniu.

Teorema 9.1.5.3. (Teorema schimbării variabilelor în integrala triplă)

Fie $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ domenii compacte măsurabile și $T : \Omega^* \rightarrow \Omega$ o transformare punctuală $(u, v, w) \xrightarrow{T} (x, y, z)$ cu jacobianul nenul în interiorul domeniului Ω^* și astfel încât $T(\Omega^*) = \Omega$. Fie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Observația 9.1.5.3. Transformarea T se alege în funcție de forma ecuațiilor suprafețelor care constituie frontiera domeniului Ω . Alegerea este bună dacă noul domeniu Ω^* este mai simplu, adică dacă integrala triplă pe Ω^* , obținută după aplicarea formulei, se descompune mai ușor într-o integrală dublă și una simplă.

9.1.6. Aplicații ale integralelor triple

9.1.6.1. Calculul volumelor

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de suprafețe netede, atunci volumul lui Ω este dat de

$$v(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

9.1.6.2. Calculul maselor și al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ reprezintă un corp material, iar funcția continuă $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea corpului, atunci masa acestui corp este dată de:

$$\text{masa}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

iar coordonatele centrului său de greutate sunt:

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{\text{masa}(\Omega)} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz , \\y_G &= \frac{1}{\text{masa}(\Omega)} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz , \\z_G &= \frac{1}{\text{masa}(\Omega)} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz .\end{aligned}$$

9.1.6.3. Momente de inerție

Momentele de inerție ale unui corp material reprezentat prin domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de densitate $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ sunt:

$$\begin{aligned}I_O &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\I_{Oxy} &= \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\I_{Oyz} &= \iiint_{\Omega} x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\I_{Oxz} &= \iiint_{\Omega} y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\I_{Ox} &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\I_{Oy} &= \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad I_{Oz} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz\end{aligned}$$

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 9.2.1. Să se calculeze integralele:

a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dydx$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dydx$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$

Soluție. a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dydx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 \cdot \arctg y \Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx =$

$$\int_0^1 x^2 \cdot \frac{\pi}{4} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{12}$$

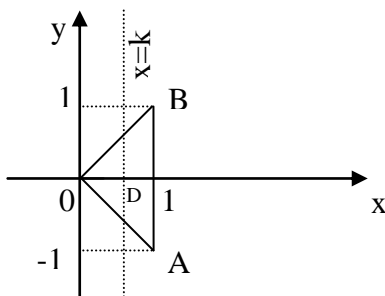
b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dydx = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \right] dx =$

$$= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}$$

Exercițiul 9.2.2. Să se calculeze $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, unde D este triunghiul cu vârfurile $O(0, 0)$, $A(1, -1)$

și $B(1, 1)$.

Soluție. Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy (vezi figura) deoarece o dreaptă $x = k$, $k \in (0, 1)$ intersectează pe D după un interval.



Dreptele OA și OB au ecuațiile:

$OA: \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, adică $OA: -y = x$

$OB: \frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, adică $OB: y = x$.

Deci: $OA: y = -x$

$OB: y = x$

Atunci domeniul D pe care se calculează integrala dubă este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$$

Putem aplica deci formula din exercițiul 11.2.2. pentru $a = 0$, $b = 1$,
 $\varphi_1(x) = -x$, $\varphi_2(x) = x$.

$$\text{Avem } \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_{-x}^x \sqrt{x^2 - y^2} dy \right] dx.$$

Calculăm întâi $F(x) = \int_{-x}^x \sqrt{x^2 - y^2} dy$. Observăm că funcția

$g(y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ este pară, adică $g(-y) = g(y)$. Atunci rezultă:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = 2 \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = \\ &= 2x^2 \arcsin \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{y=x} + 2 \int_0^x y \cdot \left(\sqrt{x^2 - y^2} \right)' dy = \\ &= 2x^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2y \sqrt{x^2 - y^2} \Big|_{y=0}^{y=x} - 2 \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \pi x^2 - F(x) \end{aligned}$$

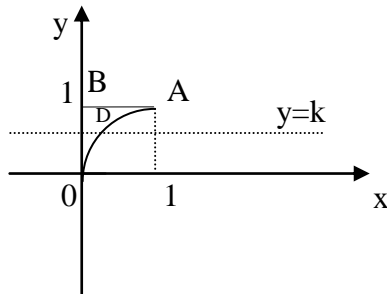
Deci $F(x) = \pi x^2 - F(x)$, de unde $F(x) = \frac{\pi x^2}{2}$.

$$\text{Așadar } \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Exercițiul 9.2.3. Să se calculeze $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, unde D este triunghiul OAB , limitat de parabola $y^2 = x$ și

dreptele $x = 0$, $y = 1$.

Soluție. Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox (vezi figura) deoarece o dreaptă $y = k$, $k \in (0, 1)$, intersectează pe D după un interval.



Domeniul D este caracterizat de :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

Aplicăm formula din exercițiul 11.2.3. pentru $c = 0$, $d = 1$, $\psi_1(y) = 0$,
 $\psi_2(y) = y^2$.

$$\text{Avem deci } \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right] dy.$$

Calculăm $F(y) = \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = e^{\frac{x}{y}} \cdot y \Big|_{x=0}^{x=y^2} = e^y y - y$ și deci:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_0^1 F(y) dy = \int_0^1 (ye^y - y) dy = \int_0^1 y(e^y)' dy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \\ &= ye^y \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{1}{2} = e - e^y \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.4. Să se calculeze următoarele integrale duble, pe domeniile indicate:

a) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D fiind domeniul limitat de cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 2ax$;

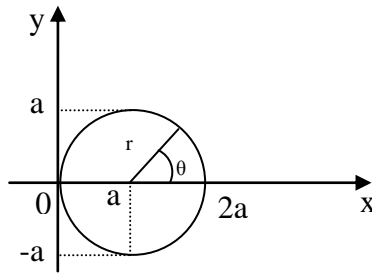
b) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, D fiind domeniul limitat de elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) $\iint_D (x^2 + y^2) \cdot y dx dy$, D fiind domeniul limitat de axa Ox și de porțiunea din cardioida $r = a(a + \cos\theta)$, situată deasupra axei Ox .

Soluții. a) Ecuația cercului ce limitează domeniul D se mai poate scrie:

$(x - a)^2 + y^2 = a^2$, deci ea definește cercul cu centrul în punctul de coordonate $(a, 0)$ și de rază a . Este convenabil să folosim coordonatele polare pentru calculul integralei duble date.

Facem așadar schimbarea de variabile $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$, dată prin transformarea
$$\begin{cases} x - a = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Noul domeniu de integrare (domeniul transformat) este:

$$D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Jacobianul acestei transformări este:

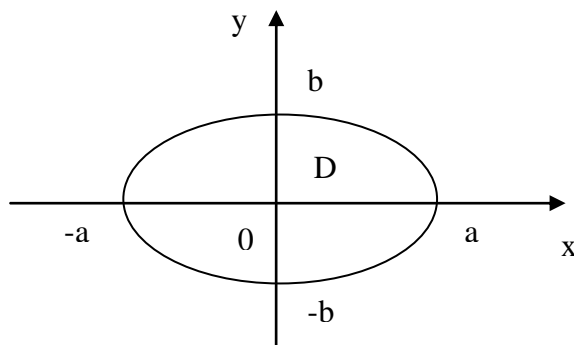
$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r,$$

iar $x^2 + y^2 = a^2 + 2ar \cos \theta + r^2$.

Deci integrala de calculat devine:

$$\begin{aligned}
\iint_{D^*} (a^2 + 2ar \cos \theta + r^2) r dr d\theta &= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} (a^2 r + 2ar^2 \cos \theta + r^3) d\theta \right] dr = \\
&= \int_0^a \left[(a^2 r + r^3) \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} \right] dr + \int_0^a \left[2ar^2 \cdot \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dr = \\
&= 2\pi \int_0^a (a^2 r + r^3) dr = 2\pi \left(a^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=a} = \frac{3\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

b) Trecem la coordonate polare generalizate: $\begin{cases} x = a r \cos \theta \\ y = b r \sin \theta \end{cases}$



Domeniul transformat este: $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot \cos \theta & -ar \cdot \sin \theta \\ b \cdot \sin \theta & br \cdot \cos \theta \end{vmatrix} = abr,$$

iar $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - r^2}$.

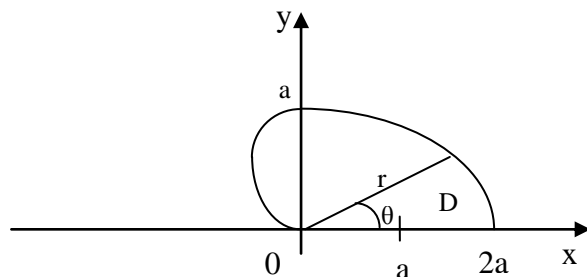
Așadar, integrala devine:

$$\begin{aligned}
\iint_{D^*} abr \sqrt{1 - r^2} dr d\theta &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} abr \sqrt{1 - r^2} d\theta \right] dr = \\
ab \int_0^1 \left[r \sqrt{1 - r^2} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dr &= ab \int_0^1 2\pi r \sqrt{1 - r^2} dr = 2\pi ab \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr \\
&= -\pi ab \int_0^1 (1 - r^2)' \sqrt{1 - r^2} dr = -\pi ab (1 - r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.
\end{aligned}$$

c) Trecem la coordonate polare: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$. Domeniul pe care se face integrarea este D (vezi figura),

iar D^* este :

$$D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta)\}.$$



Avem $(x^2 + y^2)y = r^3 \sin \theta$ și $J = r$. Deci:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) \cdot y dx dy &= \int_0^\pi \left[\int_0^{a(1+\cos \theta)} r^4 \sin \theta dr \right] d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} \sin \theta \Big|_{r=0}^{r=a(1+\cos \theta)} \right] d\theta = \\ &= \frac{a^5}{5} \int_0^\pi [(1 + \cos \theta)^5 \sin \theta] d\theta = \frac{a^5}{5} \left[\frac{-(1 + \cos \theta)^6}{6} \right]_0^\pi = \frac{32a^5}{15} \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.5. Să se calculeze aria interiorului elipsei de ecuație:

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$$

Soluție. Folosim formula: $\text{Aria}(D) = \iint_D dx dy$, unde D este interiorul elipsei.

Efectuăm schimbarea de variabilă $(x, y) \rightarrow (u, v)$ dată prin:

$$\begin{cases} x - 2y = u \\ 3x + 4y = v \end{cases}, (u, v) \in D^*$$

$$D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (u+3)^2 + (v-1)^2 \leq 100\}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$J^* = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Deci: } \text{Aria}(D) = \iint_{D^*} J^* du dv = \iint_{D^*} \frac{1}{10} du dv = \frac{1}{10} \iint_{D^*} du dv.$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale trecem la coordonate polare: $\begin{cases} u + 3 = r \cos \theta \\ v - 1 = r \sin \theta \end{cases}$, unde $(r, \theta) \in D^{**}$,

$$D^{**} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Jacobianul transformării este în acest caz $J = r$, iar

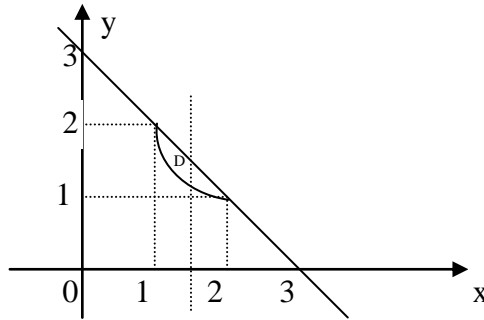
$$\begin{aligned} \iint_{D^*} du dv &= \iint_{D^{**}} J dr d\theta = \int_0^{10} \left[\int_0^{2\pi} r d\theta \right] dr = \int_0^{10} (r \cdot d\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}) dr = \\ &= \int_0^{10} r \cdot 2\pi dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=10} = 100\pi \end{aligned}$$

$$\text{Deci: } \text{Aria}(D) = \frac{1}{10} \iint_{D^*} du dv = 10\pi.$$

Exercițiul 9.2.6. Să se calculeze masa unei plăci plane D , limitate de $x + y = 3$, $xy = 2$ și a cărei densitate este $\rho(x, y) = xy$.

Soluție. $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy$. Domeniul D poate fi caracterizat astfel (așa cum se vede din figură):

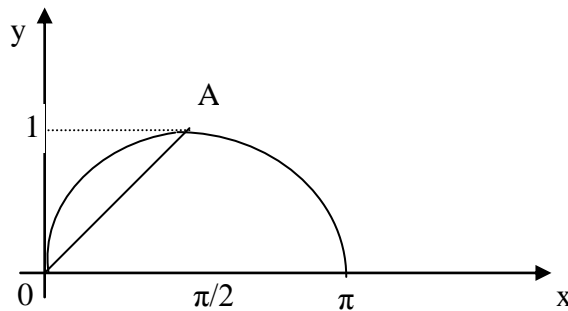
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{2}{x} \leq y \leq 3 - x\}$$



Atunci:

$$\begin{aligned} M &= \int_1^2 \int_{2/x}^{3-x} xy dx dy = \int_1^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=2/x}^{y=3-x} dx = \int_1^2 \left[\frac{9x - 6x^2 + x^3}{2} - \frac{2}{x} \right] dx \\ &= \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{18}{3} - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura de mai jos, limitat de curba $y = \sin x$ și dreapta OA care trece prin origine și punctul $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.



Soluție. Dreapta OA are ecuația $OA: y = \frac{2x}{\pi}$. Deci,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x\}$$

Se calculează $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = k \iint_D dx dy$, unde $\rho(x, y) = k = \text{const}$ fiind vorba de o placă omogenă.

Avem:

$$\iint_D dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} dy \right] dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = 1 - \frac{\pi}{4},$$

și deci $M = k \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \iint_D x \rho(x, y) dx dy &= k \iint_D x dx dy \\ &= k \int_0^{\pi/2} \left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} x dy \right] dx = k \int_0^{\pi/2} x \left(\sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx \\ &= k \int_0^{\pi/2} x \sin x dx - \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -kx \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + k \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{24} = k \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{k\pi^2}{12} \\ &= k - \frac{k\pi^2}{12} = k \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right). \end{aligned}$$

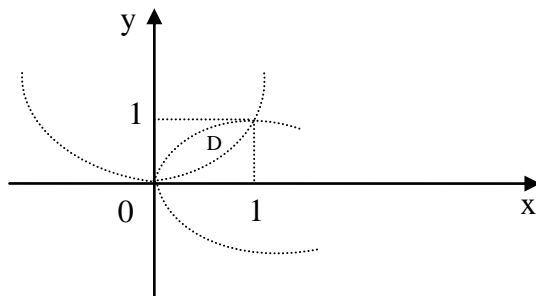
$$\text{Deci } x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy = \frac{k \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right)}{k \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)}.$$

$$\begin{aligned} \iint_D y \rho(x, y) dx dy &= k \iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} y dy \right] dx = k \int_0^{\pi/2} \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{y=\frac{2x}{\pi}}^{y=\sin x} \right] dx = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) dx = \frac{k}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right] \\ &= \frac{k}{2} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{k}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{k\pi}{24} \end{aligned}$$

$$\text{Deci } y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy = \frac{\frac{k\pi}{24}}{k \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}.$$

Exercițiul 9.2.8. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru placa omogenă mărginită de curbele $y = x^2$, $x = y^2$.

Soluție.



Domeniul D este caracterizat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy = k \iint_D y^2 dx dy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right] dx = \\ &= k \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = k \int_0^1 \left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = k \left(\frac{x^{5/2}}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 dx = \\ &= \frac{3k}{35}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog } I_y &= \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy = k \iint_D x^2 dx dy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy \right] dx = \\ &= k \int_0^1 x^2 (\sqrt{x} - x^2) dx = k \int_0^1 (x^{5/2} - x^4) dx = \frac{3k}{35}. \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.9. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dx dy dz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

b) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$$

Soluții. a) Avem:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dx dy dz &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dx \right] dy \right] dz = \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[(x+y+z+1)^{1/2} \cdot 2 \right]_{x=0}^{x=1} dy \right] dz = \\
 &= 2 \int_0^1 \left[\int_0^1 [(y+z+2)^{1/2} - (y-z+1)^{1/2}] dy \right] dz = \\
 &= 2 \int_0^1 \left[(y+z+2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - (y-z+1)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right]_{y=0}^{y=1} dz = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^1 [(z+3)^{3/2} - (z+2)^{3/2} - (z+2)^{3/2} + (z+1)^{3/2}] dz = \\
 &= \frac{4}{3} \left[(z+3)^{5/2} \frac{2}{5} - (z+2)^{5/2} \frac{2}{5} - (z+2)^{5/2} \frac{2}{5} + (z+1)^{5/2} \frac{2}{5} \right]_{z=0}^{z=1} \\
 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} [4^{5/2} - 3^{5/2} - 3^{5/2} + 2^{5/2} - 3^{5/2} + 2^{5/2} + 2^{5/2} - 1] = \\
 &= \frac{8}{15} [4^{5/2} - 3^{7/2} + 3 \cdot 2^{5/2} - 1] = \frac{8}{15} (31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz dz \right] dx dy = \iint_D xy \frac{z^2}{2} \bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D xy(1-x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D xy(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2) dx dy,
 \end{aligned}$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2) dy \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} + x^3 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^4}{4} - x^2 y^2 - 2x \frac{y^3}{3} + 2x^2 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x}{2} (1-x)^2 + \frac{x^3}{2} (1-x)^2 + \frac{x}{4} (1-x)^4 - x^2 (1-x)^2 - \frac{2x}{3} (1-x)^3 \right] dx = \\
 &= \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{24} \left(\frac{x^2}{2} - 4 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{720}$$

Exercițiul 9.2.10. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, unde Ω este domeniul mărginit de sfera

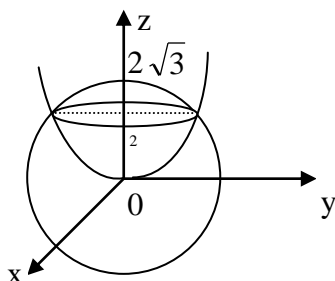
$x^2 + y^2 + z^2 = 12$ și paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$;

b) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, z \geq 0, x + y + z \leq 6\}$$

Soluții. a) Cele două suprafețe se intersectează după cercul:

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases}. \text{ Evident } 0 \leq z \leq 2\sqrt{3}$$



Aplicăm deci formula:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\sqrt{3}} \left[\iint_{D_z} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \right] dz,$$

unde D_z este proiecția pe planul xOy a unei secțiuni făcute în Ω cu un plan

$z = z_0$, $z_0 \in [0, 2\sqrt{3}]$. D_{z_0} este caracterizat de:

$$(D_z') : x^2 + y^2 \leq 4z, \text{ dacă } z \in [0, 2] \text{ și}$$

$$(D_z'') : x^2 + y^2 \leq 12 - z^2, \text{ dacă } z \in [2, 2\sqrt{3}]$$

$$\text{Deci } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^2 \left[\iint_{D_z'} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \right] dz +$$

$$+ \int_2^{2\sqrt{3}} \left[\iint_{D_z''} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy \right] dz$$

Pentru calculul integralelor duble folosim coordonatele polare, întrucât (D_z') și (D_z'') sunt discuri.

Pentru prima integrală dublă avem:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in [0, 2\sqrt{z}], \theta \in [0, 2\pi], \text{ iar jacobianul este } J = r.$$

Deci,

$$\iint_{D_z'} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_0^{2\sqrt{z}} \left[\int_0^{2\pi} (r^2 + z^2) \cdot r d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^{2\sqrt{z}} r(r^2 + z^2) dr =$$

$$2\pi \left[\frac{r^4}{4} + z^2 \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=2\sqrt{z}} = 4\pi z^2 (2 + z).$$

Pentru cea de a doua integrală dublă, avem:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in [0, \sqrt{12 - z^2}], \theta \in [0, 2\pi].$$

Deci,

$$\iint_{D_z''} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy = \int_0^{\sqrt{12 - z^2}} \left[\int_0^{2\pi} (r^2 + z^2) \cdot r d\theta \right] dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{12 - z^2}} r(r^2 + z^2) dr = \frac{\pi}{2} (144 - z^4)$$

Așadar,

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^2 4\pi z^2 (2 + z) dz + \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} (144 - z^4) dz = \frac{32\pi}{5} (18\sqrt{3} - \frac{97}{6}).$$

b) Suntem în situația a doua de la exercițiul 9.3.2. pentru

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 9\}, \varphi_1(x, y) = 0 \text{ și } \varphi_2(x, y) = 6 - x - y$$

Aplicăm deci formula adecvată, adică:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \sqrt{x^2 + y^2} dz \right] dx dy.$$

Deci

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iint_D \left[\int_0^{6-x-y} \sqrt{x^2 + y^2} dz \right] dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (6 - x - y) dx dy$$

Calculăm această integrală prin trecere la coordonate polare. Avem:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in [0, 3]; \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (6 - x - y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 r^2 \cdot (6 - r \cos \theta - r \sin \theta) dr \right] d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(6 \cdot \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \cos \theta - \frac{r^4}{4} \sin \theta \right) \right]_{r=0}^{r=3} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[54 - \frac{3^4}{4} \cos \theta - \frac{3^4}{4} \sin \theta \right] d\theta = 108\pi$$

Exercițiul 9.2.11. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y^2 + z^2 \leq x^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\};$$

b) $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, unde Ω este domeniul limitat de conul

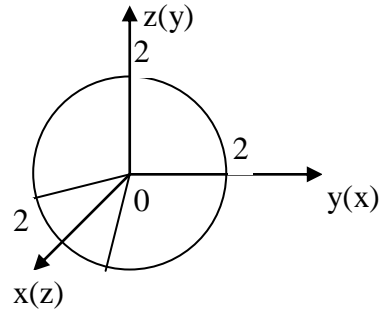
$$z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) \text{ și planul } z = h;$$

c) $\iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, unde Ω este domeniul mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Soluții. a) Este convenabil să folosim transformarea:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

Noile variabile de integrare sunt r, θ, φ , iar pentru a determina domeniul Ω^* (domeniul transformat), înlocuim $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$ în ecuațiile ce definesc domeniul Ω .



Din $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ rezultă $r^2 \leq 4$, deci $r \in [0, 2]$.

Din $y^2 + z^2 \leq x^2$ deducem că $r^2 \sin^2 \theta \leq r^2 \cos^2 \theta$, adică $\sin^2 \theta \leq \cos^2 \theta$, ceea ce este echivalent cu $\sin^2 \theta \leq \frac{1}{2}$.

(1)

Din $x \geq 0$ rezultă $r \cos \theta \geq 0$, adică $\cos \theta \geq 0$, de unde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (2)

Din (1) și (2) avem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\text{Deci } \Omega^* = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 2], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

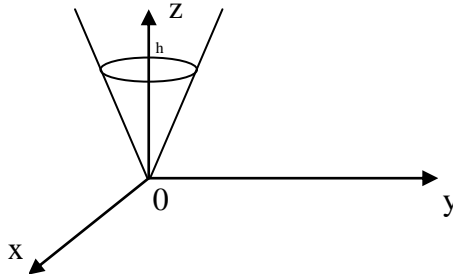
Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Integrala de calculat devine:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin \theta d\varphi \right) d\theta dr &= 2\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/4} r^4 \sin \theta d\theta \right) dr = \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[r^4 (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \right] dr = \pi(2 - \sqrt{2}) \int_0^2 r^4 dr = \\ &= \pi(2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=2} = \frac{2^5 \cdot \pi \cdot (2 - \sqrt{2})}{5}. \end{aligned}$$

b) Domeniul pe care se face integrarea este:



Este convenabil să folosim coordonatele cilindrice:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Avem $z \in [0, h]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ iar $z^2 \geq \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2)$ ne dă $r \in \left[0, \frac{zR}{h}\right]$.

Așadar, $\Omega^* = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \frac{zR}{h}, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, h]\}$.

Jacobianul este:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Integrala devine:

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[\int_0^{zR/h} \left[\int_0^{2\pi} z r d\theta \right] dr \right] dz &= 2\pi \int_0^h \left[\int_0^{zR/h} z r dr \right] dz = 2\pi \int_0^h z \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=zR/h} dz = \\ &= 2\pi \int_0^h \left(\frac{z}{2} \cdot \frac{z^2 R^2}{h^2} \right) dz = \pi \int_0^h \frac{z^3 R^2}{h^2} dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4} \end{aligned}$$

d) Vom folosi coordonatele sferice generalizate, adică:

$$\begin{cases} x = \arcsin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

Avem $\Omega^* = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ iar

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc r^2 \sin \theta.$$

Integrala devine:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2} d\varphi d\theta dr &= 2\pi abc \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sqrt{1-r^2} \sin \theta d\theta dr \\ &= \int_0^1 \left[r^2 \sqrt{1-r^2} \cdot (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right] dr = 4\pi abc \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr. \end{aligned}$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale facem schimbarea de variabilă $r = \sin t$.

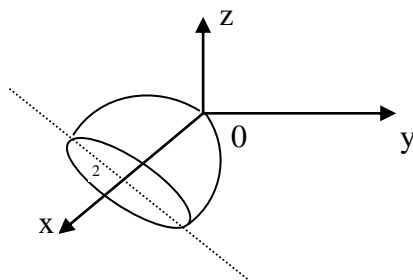
$$\begin{aligned} \text{Deci } \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t) dt = \\ &= \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci: } \iiint_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \\ = 4\pi abc \cdot \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = 4\pi abc \frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2 abc}{4}. \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de paraboloidul $x = \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ și planul de

ecuație $x = 2$.

Soluție. Corpul Ω al cărui volum trebuie să-l aflăm, este reprezentat în figura următoare:



Vom folosi coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 3r \cos \theta, \quad x \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = 4r \sin \theta \end{cases}$$

Din $x \geq \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ rezultă că $x \geq r^2$, deci $0 \leq r \leq \sqrt{x}$.

Așadar, $\Omega^* = \{(r, \theta, x) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{x}, \theta \in [0, 2\pi], x \in [0, 2]\}$.

Jacobianul transformării este : $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, x)} = 12r$.

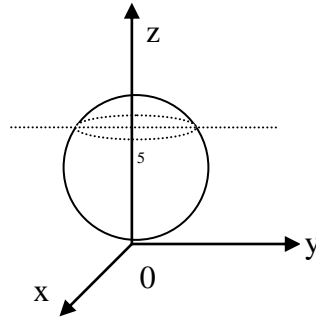
Volumul este:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, x)} d\theta dr dx = 12 \iiint_{\Omega^*} r d\theta dr dx = \\ &= 24\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} r dr \right) dx = 24\pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{x}} dx = 12\pi \int_0^2 x dx = \\ &= 12\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 24\pi \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.13. Să se calculeze masa corpului Ω , mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$, știind că densitatea în fiecare punct este:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Soluție. Se aplică formula $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$.



Avem $z \in [0, 10]$ și $(D_z): x^2 + y^2 \leq 10z - z^2$.

$$\text{Deci } M = \int_0^{10} \left[\iint_{D_z} \rho(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

Pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare. Deci $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, iar $D_z^* = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq$

$\sqrt{10z - z^2}$, $\theta \in [0, 2\pi]\}$

Avem, așadar :

$$\begin{aligned} \iint_{D_z} \rho(x, y, z) dx dy &= \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 + z^2} r d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{1}{r^2 + z^2} dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{(r^2 + z^2)'}{r^2 + z^2} dr = \pi \cdot \ln(r^2 + z^2) \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{10z-z^2}} = \end{aligned}$$

$$= \pi \ln(10z) - \pi \ln(z^2).$$

$$\begin{aligned} \text{Deci, } M &= \int_0^{10} [\pi \ln(10z) - \pi \ln(z^2)] dz = \pi \int_0^{10} \ln\left(\frac{10}{z}\right) dz = \\ &= \pi \int_0^{10} \ln 10 dz - \pi \int_0^{10} \ln z dz = \pi \cdot 10 \cdot \ln 10 - \pi \int_0^{10} (z)' \ln z dz = \\ &= 10 \pi \ln 10 - 10 \pi \ln 10 + \pi \int_0^{10} dz = \pi \cdot z \Big|_0^{10} = 10\pi. \end{aligned}$$

Exercițiul 9.2.14. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale segmentului cilindric omogen:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 2y\}$$

Soluție. Corpul fiind omogen, funcția ρ este constantă.

$$\text{Deci, } x_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_{\Omega} x dx dy dz ; y_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_{\Omega} y dx dy dz ;$$

$$z_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_{\Omega} z dx dy dz.$$

Notând $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$. Avem:

$$\begin{aligned} \bullet \quad v(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{2y} dz \right) dx dy = \iint_D 2y dx dy = \\ &= 2 \iint_D y dx dy = 2 \iint_{D^*} r^2 \sin \theta dr d\theta = 2 \int_0^3 \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta \right) dr \\ &= 2 \int_0^3 \left[r^2 (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right] dr = 4 \int_0^3 r^2 dr = 4 \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{2y} x dz \right) dx dy = \iint_D xz \Big|_{z=0}^{z=2y} dx dy = \\ &= \iint_D 2xy dx dy = 2 \iint_{D^*} r^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta = \\ &= \int_0^3 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 \cdot \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \iiint_{\Omega} y dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{2y} y dz \right) dx dy = \iint_D yz \Big|_{z=0}^{z=2y} dx dy = \\ &= \iint_D 2y^2 dx dy = 2 \iint_{D^*} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \\ &= \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 \cdot \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{3^4}{4} \left(\pi - \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = 3^4 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{2y} z dz \right) dx dy = \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2y} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D 4y^2 dx dy = 2 \iint_D y^2 dx dy = 3^4 \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Rezultă } x_G = 0; y_G = z_G = \frac{1}{36} \cdot 3^4 \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{16}.$$

Exercițiul 9.2.15. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material omogen, limitat de suprafețele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ și $z = c$.

Soluție. $I_{xOy} = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ (corpul fiind omogen, considerăm densitatea egală cu unitatea).

Trecem la coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta, z \in [0, c], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{Din } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, \text{ obținem } r^2 \leq \frac{z^2}{c^2}, \text{ de unde } 0 \leq r \leq \frac{z}{c}.$$

Deci $\Omega^* = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \frac{z}{c}, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, c]\}$, iar jacobianul transformării este $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \text{abr.}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_{xOy} &= ab \iiint_{\Omega^*} z^2 r d\theta dr dz = 2\pi ab \int_0^c \left(\int_0^{z/c} z^2 r dr \right) dz = \\ &= 2\pi ab \int_0^c \left[z^2 \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\frac{z}{c}} dz = \frac{\pi ab}{c^2} \int_0^c z^4 dz = \frac{\pi ab}{c^2} \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_0^c = \frac{\pi abc^3}{5} \\ \bullet \quad I_{yOz} &= \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = a^3 b \iiint_{\Omega^*} r^3 \cos^2 \theta d\theta dr dz = \\ &= a^3 b \int_0^c \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{z/c} r^3 \cos^2 \theta dr \right] d\theta dz = \frac{a^3 b}{4} \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4}{c^4} \cos^2 \theta d\theta dz = \\ &= \frac{a^3 b}{4c^4} \int_0^c \left(\int_0^{2\pi} \frac{z^4 (1 + \cos 2\theta)}{2} d\theta \right) dz = \frac{a^3 b}{8c^4} \int_0^c z^4 \cdot 2\pi dz + \\ &+ \frac{a^3 b}{8c^4} \int_0^c \left[z^4 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz = \frac{\pi a^3 b}{4c^4} \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi a^3 bc}{20} \\ \bullet \quad I_{xOz} &= \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = ab^3 \iiint_{\Omega^*} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr dz = \\ &= ab^3 \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4}{4c^4} \sin^2 \theta d\theta dz = \frac{ab^3}{4c^4} \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{z^4 (1 - \cos 2\theta)}{2} d\theta dz = \\ &= \frac{ab^3}{8c^4} \int_0^c z^4 \cdot 2\pi dz - \frac{ab^3}{8c^4} \int_0^c \left[z^4 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dz = \frac{\pi ab^3}{4c^4} \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi ab^3 c}{20} \end{aligned}$$

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.3. Exerciții propuse

Exercițiul 9.3.1. Să se calculeze integralele următoare:

a) $\iint_D \frac{\sqrt{xy}}{x+1} dx dy$, unde $D = [0, 3] \times [0, 1]$

b) $\iint_D \frac{dx dy}{(1+xy)^2}$, unde $D = [0, 1] \times [0, 1]$

c) $\iint_D \frac{y}{1+xy} dx dy$, unde $D = [0, 1] \times [0, 1]$

d) $\iint_D \frac{\cos y}{1+\sin x \sin y} dx dy$, unde $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $\iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)} dx dy$, unde $D = [1, 3] \times [0, 1]$

R. a) $\frac{4}{3} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$; b) $\ln 2$; c) $2 \ln 2 - 1$; d) $\frac{\pi^2}{8}$; e) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$.

Exercițiul 9.3.2. Să se calculeze $\iint_D f(x, y) dx dy$ în fiecare din cazurile următoare:

a) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

c) $f(x, y) = y^2 \sin x$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1 + \cos x\}$

d) $f(x, y) = x + 2y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 3, y^2 - 4 \leq x \leq 5\}$

e) $f(x, y) = y e^{x^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y^{2/3}\}$

f) $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 3 \cos y\}$

R. a) $\frac{9}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{4}{3}$; d) 50,4; e) $\frac{e-2}{4}$; f) $\frac{12}{5}$

Exercițiul 9.3.3. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (y^2 - x^2) dx dy$, $D: \begin{cases} 1 \leq x+y \leq 5 \\ 0 \leq y-x \leq 3 \end{cases}$

b) $\iint_D (x+y) dx dy$, D fiind domeniul mărginit de dreptele $x=y$, $x+y=2$, $y=0$

c) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^4} dx dy$, D fiind domeniul determinat de $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x+y \leq 4 \end{cases}$

d) $\iint_D xy dx dy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ și dreapta de ecuație $y = 2x + 3$

e) $\iint_D \frac{y}{1+y} dx dy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2 + 1$ și dreptele $y = 2x$, $x = 0$.

f) $\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x\}$

g) $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3, y \leq x^2, x \geq 0\}$

h) $\iint_D \sqrt{1+y} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x, xy \geq 1, 1 \leq x \leq 2\}$

R. a) 27; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{48}$; d) $53 + \frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \ln 3$; f) $\frac{3}{8}(\pi - 2)$; g) $\frac{2}{135}$; h) $1 - 2 \ln \frac{3}{2}$.

Exercițiul 9.3.4. Utilizând coordonatele polare sau o schimbare de variabilă convenabilă, să se calculeze:

a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $\iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

d) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

e) $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

f) $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$

g) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$

h) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \leq 0\}$

i) $\iint_D (x+y) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

j) $\iint_D x dx dy$, D este domeniul limitat de curba de ecuație

$$\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$$

k) $\iint_D (x+3) dx dy$, $D : (2x - y + 1)^2 + (x + 3y - 4)^2 = 49$

l) $\iint_D xy dx dy$, unde D este limitat de axele de coordonate și arcul de astroidă $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

m) $\iint_D \left(a^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3}\right)^{3/2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$

n) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, unde D este domeniul mărginit de

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0;$$

o) $\iint_D x dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x > 0\}$

R. a) $\frac{16\pi}{3}$; b) $\pi(1 - \ln 2)$; c) $\frac{32\pi}{5}$; d) $\pi(e - 1)$; e) $\frac{484\pi}{5}$; f) 2π ;

g) $\frac{1}{9}(32 - 3\pi)$; h) $2\sqrt{2} \frac{\pi}{3}$; i) 0; j) 0; k) 28π ; l) $\frac{a^4}{80}$; m) $\frac{2\pi a^3}{35}$;

n) $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9}\right) \cdot \frac{a^3}{2}$; o) $\frac{1}{3}(5\sqrt{2} - 6)$.

Exercițiul 9.3.5. Să se calculeze aria domeniului plan D mărginit de curbele următoare:

a) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

b) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$;

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$);

d) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$;

e) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

R. a) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; b) $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$; c) $\frac{3\pi a^2}{8}$; d) $\frac{5\pi a^2}{8}$; e) $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$.

Exercițiul 9.3.6. Să se calculeze masa pentru fiecare din plăcile plane, de densitate de masă $\rho(x, y)$ dată:

a) D este limitat de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $\rho(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$;

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2, y^2 \leq x \leq 4y^2\}$; $\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^4}$.

R. a) $\frac{2}{3}a^2b$; b) $\frac{5}{2}$.

Exercițiul 9.3.7. Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane de densitate $\rho(x, y)$:

a) D este limitat de $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $\rho(x, y) = k$;

b) D este limitat de $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $\rho(x, y) = 1$.

R. a) $x_G = \frac{2}{5}$, $y_G = 0$; b) $x_G = 0$; $y_G = \frac{\pi}{8}$

Exercițiul 9.3.8. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru placa plană omogenă, mărginită de dreptele $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$

R.4

Exercițiul 9.3.9. Să se calculeze momentul de inerție al plăcii omogene limitată de cardioida $r = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ în raport cu originea.

R. $\frac{35\pi a^4}{16}$

Exercițiul 9.3.10. Să se calculeze momentul de inerție față de origine al plăcii plane neomogene reprezentată prin domeniul:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

și având densitatea în fiecare punct, $\rho(x, y) = (b^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 b^2)^{-\frac{1}{2}}$.

R. $\frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)(2 - \sqrt{2})$.

Exercițiul 9.3.11. Să se calculeze următoarele integrale :

a) $\iiint_{\Omega} (xyz + x) dx dy dz$, unde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

b) $\iiint_{\Omega} x^3 y^2 z dx dy dz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

c) $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$, unde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

d) $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}} dx dy dz$, unde $\Omega = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 3]$

R. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{110}$; c) 4; d) $\sqrt{10} - 1$

Exercițiul 9.3.12. Să se calculeze $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, în următoarele situații:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2\}$

b) $f(x, y, z) = x^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

d) $f(x, y, z) = \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

e) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^4}$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$\text{f) } f(x, y, z) = x + y + z, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

$$\text{R. a) } \frac{16\pi}{3}; \text{ b) } 32\pi; \text{ c) } 16\pi; \text{ d) } \frac{1}{64}; \text{ e) } \frac{1}{48}; \text{ f) } \frac{\pi}{6}$$

Exercițiul 9.3.13. Utilizând o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze următoarele integrale triple:

$$\text{a) } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \text{ unde}$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\text{b) } \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$$\text{c) } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq az, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\text{d) } \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz\}$$

$$\text{e) } \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$$

$$\text{f) } \iiint_{\Omega} [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] dx dy dz,$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

$$\text{g) } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - z^2) dx dy dz, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$\text{R. a) } \frac{3\pi}{4}; \text{ b) } \pi r^4; \text{ c) } \frac{\pi a h^3}{12} (3h + 2a); \text{ d) } \frac{59\pi r^5}{480}; \text{ e) } \frac{\pi}{10};$$

$$\text{f) } \frac{8\pi}{5} abc [a^2 + b^2 + c^2]; \text{ g) } \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Exercițiul 9.3.14. Să se determine volumul părții din cilindrul $x^2 + y^2 = 2ax$ cuprinsă între paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ și planul xOy .

$$\text{R. } \frac{3\pi a^3}{4}$$

Exercițiul 9.3.15. Să se calculeze volumul corpului:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az, x^2 + y^2 + az \leq 4a^2\}$$

$$\text{R. } \frac{37\pi a^3}{6}$$

Exercițiul 9.3.16. Să se determine volumul corpului mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ și $x^2 + y^2 = 2az, z \geq 0$.

$$\text{R. } \pi a^3 \left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \right)$$

Exercițiul 9.3.17. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafața

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{R.} \frac{\pi abc^2}{3h} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

Exercițiul 9.3.18. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, z = 0, y = 0, y = x.$$

$$\mathbf{R.} \frac{21\pi\sqrt{2}}{8}$$

Exercițiul 9.3.19. Să se determine volumul corpului mărginit de:

$$\text{a) } \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2};$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \text{ și } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, z \geq 0.$$

$$\text{c) } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a^2} \text{ și planul } x = a.$$

$$\text{d) } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$\text{e) } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$$

$$\mathbf{R.} \text{ a) } \frac{\pi^2 abc\sqrt{2}}{8}; \text{ b) } \frac{4\pi abc}{3}(\sqrt{2} - 1); \text{ c) } \pi abc; \text{ d) } \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}; \text{ e) } \frac{\pi a^3}{3}$$

Exercițiul 9.3.20. Să se calculeze masa corpului

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 2|z|$.

$$\mathbf{R.} \pi abc^2$$

Exercițiul 9.3.21. Să se determine masa sferei

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3rz\}$$

știind că densitatea în fiecare punct este egală cu pătratul distanței de la origine la acest punct.

$$\mathbf{R.} \frac{81}{5} \pi^5$$

Exercițiul 9.3.22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului Ω , cu densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, dacă:

$$\text{a) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c\}, \rho(x, y, z) = 1$$

$$\text{b) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}, \rho(x, y, z) = 1$$

$$\text{c) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2z^2 \leq 4x, x \leq 2\}, \rho(x, y, z) = 1$$

$$\text{d) } \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz\}, \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\mathbf{R.} \text{ a) } x_G = y_G = 0; z_G = \frac{3c}{4}; \text{ b) } x_G = y_G = 0; z_G = \frac{5}{83}(6\sqrt{3} + 5)a;$$

c) $x_G = \frac{4}{3}$; $y_G = z_G = 0$; d) $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{243}{512} r$.

Exercițiul 9.3.23. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz a corpului material omogen, limitat de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

R. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$

Exercițiul 9.3.24. Să se determine momentele de inerție față de axe și față de planele de coordonate, ale elipsoidului omogen $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1$.

R. $I_{xOy} = I_{xOz} = \frac{8}{15}\pi$, $I_{yOz} = \frac{32}{15}\pi$, $I_{Ox} = \frac{16}{15}\pi$, $I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{8}{3}\pi$

10. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMUL TIP

10.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

10.1.1. Pânze și suprafețe netede

Definiția 10.1.1.1. Se numește *pânză netedă* orice funcție de clasă C^1 , $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime deschisă și conexă (domeniu). Pânza S se numește *simplă*, dacă aplicația S este injectivă; ea se numește *nesingulară*, dacă, în fiecare punct din D , matricea jacobiană a lui S are rangul doi, imaginea directă a mulțimii D prin aplicația S , $S(D)$, se numește *imaginea pânzei S* și o vom nota (S) .

Definiția 10.1.1.2. Două pânze $S_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numesc *echivalente* (se scrie $S_1 \sim S_2$) dacă există un difeomorfism $T : D_1 \rightarrow D_2$ astfel încât jacobianul lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1 și $S_1 = S_2 \circ T$. Difeomorfismul T se mai numește *schimbare de parametri*.

Observația 10.1.1.1. Folosind bijectivitatea lui T , se arată ușor că două pânze echivalente au aceeași imagine. De asemenea, este evident că relația “ \sim ” este o relație de echivalență pe mulțimea pânzelor, prin urmare, ea împarte această mulțime în clase de echivalență.

Definiția 10.1.1.3. Se numește *suprafață netedă* orice clasă de echivalență a unei pânze netede nesingulare. Prin *imaginea unei suprafețe* înțelegem imaginea unei pânze din clasa de echivalență respectivă. Deseori, se folosește termenul *suprafață* în sensul de imagine a unei suprafețe. Această accepțiune conduce la următoarele interpretări:

1) Dacă $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o pânză netedă, nesingulară, care asociază fiecărui punct $(u, v) \in D$ un punct $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (S)$ se spune că egalitățile

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

sunt *ecuațiile parametrice ale suprafeței* din care face parte pânza considerată. Evident, o suprafață poate avea mai multe reprezentări parametrice.

2) Ecuația $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$ se numește *ecuația explicită a unei suprafețe*, și anume, a suprafeței reprezentată de pânza $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)).$$

3) Ecuația $F(x, y, z) = 0$ este *ecuația implicită a unei suprafețe* deoarece, în condițiile teoremei funcțiilor implicite, se poate determina, local, o explicitare unică $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, care definește, evident, o pânză, $S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$, $(u, v) \in D$. Imaginea acestei pânze este însă, în general, numai o parte a mulțimii $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

4) Sistemul: $F_1(x, y, z, u, v) = 0$, $F_2(x, y, z, u, v) = 0$, $F_3(x, y, z, u, v) = 0$ poate fi considerat o *reprezentare parametrică a unei suprafețe*, deoarece, în anumite condiții, el definește, local, pe x, y, z ca funcții de u și v .

10.1.2. Aria unei suprafețe

Considerăm o suprafață reprezentată de o pânză S netedă și simplă, definită explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune oarecare a domeniului D ; acestei diviziuni îi corespunde o partiție $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ a imaginii (S) a suprafeței considerate. Fie $(x, y) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ arbitrar și $M_i \in (S)$ punctul de coordonate $x_i, y_i, f(x_i, y_i)$. Considerăm planul π_i tangent la (S) , în punctul M_i . Considerăm apoi cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i și generatoarele paralele cu Oz . Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i a cărui proiecție pe planul xOy este D_i .

Aproximăm aria (S_i) prin $\text{aria}(T_i)$ și, prin urmare, aria imaginii (S) a suprafeței prin $\sum_{i=1}^n \text{aria}(T_i)$. Evident, aproximarea este cu atât mai bună, cu cât diviziunea d este mai fină. Este natural, deci, să definim $\text{aria}(S)$

ca fiind $\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{aria}(T_i)$ atunci când această limită există, este finită și nu depinde de alegerea punctelor (x_i, y_i) . Acceptând această idee se poate demonstra că:

$$\text{aria}(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Dacă suprafața este dată parametric : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$ atunci:

$$\text{aria}(S) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

$$\text{unde } A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Observația 10.1.2.1. În cele prezentate mai sus am definit, de fapt, *aria imaginii unei pânze*. Cum imaginea unei suprafețe este, prin definiție, imaginea pânzei care determină suprafața, putem spune că am definit *aria imaginii unei suprafețe*, dacă ținem seama că integrala de mai sus nu depinde de pânza considerată ca reprezentant al suprafeței date. Cum de obicei, se folosește termenul suprafață în loc de imagine a suprafeței, putem spune că $\text{aria}(S)$ este *aria suprafeței* reprezentată de S .

10.1.3. Integrala de suprafață de primul tip

Definiția 12.1.3.1. Fie o suprafață netedă reprezentată de pânza S definită parametric prin: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil și fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie $\Phi : (S) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară, $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune arbitrară a domeniului D , ξ un sistem de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Funcției Φ , diviziunii d și sistemului ξ le asociem suma :

$$\sigma_\Phi(d, \xi) = \sum_{i=1}^n \Phi(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{aria}(S_i)$$

unde $(S_i) = \{(x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)), (u, v) \in D_i\}$, $(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$, $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Funcția Φ se numește *integrabilă în raport cu aria* pe suprafața dată dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d , cu $\|d\| < \eta$ și oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_\Phi(d, \xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real I se numește *integrala de suprafață în raport cu aria* (sau *integrala de suprafață de primul tip*) a funcției Φ și se notează:

$$I = \iint_S \Phi(x, y, z) ds$$

Observația 10.1.3.1. a) Terminologia este justificată de faptul că, deși numărul real I este asociat funcției Φ și unei pânze S , se poate demonstra că, dacă se consideră o altă reprezentare parametrică a suprafeței date (adică o pânză echivalentă cu S), numărul I nu se schimbă.

b) Dacă $\Phi(x, y, z) = 1$, atunci evident $I = a(S)$, deci $a(S) = \iint_S ds$.

Teorema 10.1.3.1. Fie o suprafață netedă și simplă reprezentată de pânza S definită parametric prin: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$ unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa, iar $\Phi : (S) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci Φ este integrabilă în raport cu aria pe suprafața dată și are loc egalitatea:

$$\iint_S \Phi(x, y, z) ds = \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv$$

Observația 10.1.3.2. a) Dacă suprafața este dată explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, atunci:

$$\iint_S \Phi(x, y, z) ds = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

b) Integrala de suprafață are proprietăți analoge integralelor duble: liniaritatea în raport cu funcția, aditivitatea în raport cu descompunerea imaginii suprafeței într-un număr finit de părți fără puncte interioare comune, etc. În consecință, dacă suprafața este dată implicit, printr-o ecuație care nu poate fi explicitată în raport cu nici una dintre variabile, se poate încerca descompunerea imaginii sale într-un număr finit de părți explicabile în raport cu câte o variabilă și apoi se adună integralele obținute.

10.1.4. Aplicații ale integralelor de suprafață de primul tip

10.1.4.1. Masa unei suprafețe materiale

Dacă imaginea $(S) \subset \mathbf{R}^3$ modelează o suprafață materială, iar $\rho : (S) \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă care asociază fiecărui punct $(x, y, z) \in (S)$ densitatea $\rho(x, y, z)$ a suprafeței materiale în acest punct, atunci masa m , este dată de :

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) ds$$

10.1.4.2. Centrul de greutate al unei suprafețe materiale

În aceleași condiții, coordonatele centrului de greutate G al suprafeței materiale modelate de (S) sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) ds, \quad y_G = \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x, y, z) ds, \\ z_G = \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x, y, z) ds$$

10.1.4.3. Momentele de inerție ale unei suprafețe materiale

Momentele de inerție ale suprafeței materiale, modelată de (S) , în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds \\ I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds \\ I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$

Momentele de inerție față de originea axelor de coordonate și față de planele de coordonate se definesc analog.

10. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMUL TIP

10.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 10.2.1. Să se calculeze $\iint_S z^2 dS$, unde S este dată parametric prin: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hu$, $u \in [0, a]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Soluție. Deoarece S este dată parametric se aplică direct formula din teorema 10.1.3.1. Calculăm mai întâi:

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ h & 0 \end{vmatrix} = -hu \cos v$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 0 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -hu \sin v$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = h^2 u^2 \cos^2 v + h^2 u^2 \sin^2 v + u^2 = h^2 u^2 + u^2 = (h^2 + 1) u^2$$

Deci $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = u\sqrt{h^2 + 1}$.

Notând $D = [0, a] \times [0, 2\pi]$, cu formula din teorema 10.1.3.1. obținem:

$$\iint_S z^2 dS = h^2 \sqrt{h^2 + 1} \iint_D u^3 du dv = h^2 \sqrt{h^2 + 1} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4 h^2 \sqrt{h^2 + 1}}{2}$$

Exercițiul 10.2.2. Să se calculeze $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, unde S este porțiunea suprafeței conice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafața $x^2 + y^2 = 2ax$.

$\sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafața $x^2 + y^2 = 2ax$.

Soluție. Suprafața fiind dată explicit, aplicăm formula din observația 10.1.3.2. Notând $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $D \subset \mathbb{R}^2$ discul limitat de cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 2ax$, rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}, \text{ deci}$$

$$\iint_S (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_D (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \iint_{D^*} (r^2 \sin t \cos t + r^2 \sin t + r^2 \cos t) r dr dt = \\ & = \sqrt{2} \iint_{D^*} r^3 (\sin t \cos t + \sin t + \cos t) dr dt \end{aligned}$$

unde $D^* = \{(r, t): 0 \leq r \leq 2a \cos t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
 \iint_S (xy + yz + zx) dS &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(\sin t \cos t + \sin t + \cos t) \int_0^{2a \cos t} r^3 dr \right] dt \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(\sin t \cos t + \sin t + \cos t) \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2a \cos t} \right] dt = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 16a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t \cos t + \sin t + \cos t) \cos^4 t dt = \\
 &= 4\sqrt{2}a^4 \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^5 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^4 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 t dt \right] \\
 &= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 t dt = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t dt = \\
 &= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^2 \cos t dt = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t) (\sin t)' dt = \\
 &= 8\sqrt{2}a^4 \left(\sin t - 2 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= 8\sqrt{2}a^4 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4.
 \end{aligned}$$

Exercițiul 10.2.3. Să se calculeze $\iint_S (x + y + z) dS$ unde S este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$.

Soluție. Ecuațiile parametrice ale emisferei S sunt:

$$\begin{cases} x = 2 \sin \theta \cos \varphi \\ y = 2 \sin \theta \sin \varphi, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = 2 \cos \theta \end{cases}$$

Calculăm :

$$\begin{aligned}
 A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \sin \varphi & 2 \sin \theta \cos \varphi \\ -2 \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = 4 \sin^2 \theta \cos \varphi \\
 B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -2 \sin \theta & 0 \\ 2 \cos \theta \cos \varphi & -2 \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} = 4 \sin^2 \theta \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \cos \varphi & -2 \sin \theta \sin \varphi \\ 2 \cos \theta \sin \varphi & 2 \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = 4 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + 4 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 16 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + 16 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + 16 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 16 \sin^4 \theta + 16 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 16 \sin^2 \theta$$

$$\text{Deci } \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 4 \sin \theta$$

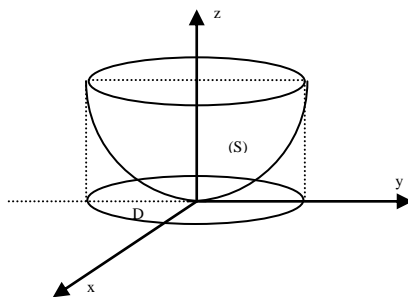
Aplicând acum formula din teorema 10.1.3.1., notând $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$, obținem :

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) dS &= \iint_D (2 \sin \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi + 2 \cos \theta) \cdot 4 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= 8 \iint_D (\sin^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \theta) d\theta d\varphi = \\ &= 8 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi + 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] = 8\pi \end{aligned}$$

Exercițiul 10.2.4. Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 3z$ mărginită de planul $z = 3$.

Soluție. Deoarece suprafața este definită explicit în raport cu variabila z , utilizăm formula:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$



Deoarece $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ și $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 9\}$ obținem $a(S) =$

$$\iint_D \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2} dx dy.$$

Trecând la coordonate polare: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r \in [0, 3]$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{D(x, y)}{D(r, t)} = r. \text{ Notând } D^* = [0, 3] \times [0, 2\pi], \text{ obținem:}$$

$$\begin{aligned}
 a(S) &= \iint_{D^*} \sqrt{1 + \frac{4}{9}r^2} \cdot r dr dt = 2\pi \frac{9}{8} \int_0^3 \left(1 + \frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{4}{9}r^2\right) dr = \\
 &= \frac{9\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{3\pi}{2} \left[\left(1 + \frac{4}{9} \cdot 9\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{3\pi}{2} (5\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

Exercițiul 10.2.5. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, situată în semispațiul $z \geq 0$.

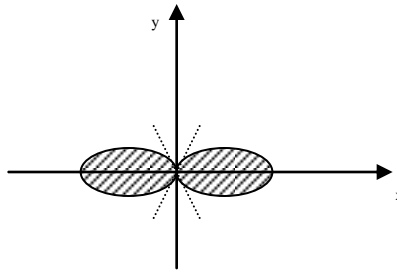
Soluție. Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu condiția $z \geq 0$ se poate explicita

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Cilindrul are generatoarele paralele cu Oz și are directoare în planul xOy lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, prin urmare:

$$a(S) = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de lemniscată.



Trecând la coordonate polare și notând

$$D^* = \left\{ (r, t) : 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2t}, t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 \text{obținem } a(S) &= a \iint_{D^*} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr dt = 4a \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{a\sqrt{\cos 2t}} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right] dt = \\
 &= 4a \int_0^{\pi/4} (a - a\sqrt{2} \sin t) dt = 4a \left(\frac{\pi}{4} a + a\sqrt{2} \cos t \Big|_0^{\pi/4} \right) = \\
 &= 4a^2 \left[\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right] = 4a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} \right) = a^2 (\pi + 4 - 4\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Exercițiul 10.2.6. Să se determine masa suprafeței materiale (S) dată prin

$$z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad 0 \leq z \leq 1, \text{ dacă densitatea în fiecare punct este } \rho(x, y, z) = z.$$

Soluție. Proiecția porțiunii din paraboloidul $z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ corespunzătoare condiției $z \leq 1$ este: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Punând $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, obținem:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Aplicăm acum formula 10.1.4.1. obținem:

$$m(S) = \iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_S z dS = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$, obținem:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr dt = \frac{1}{2} \iint_{D^*} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr dt = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3(1 + r^2)}{\sqrt{1 + r^2}} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (\sqrt{1 + r^2})' dr + \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 (\sqrt{1 + r^2})' dr = \\ &= \pi \left[r^2 \sqrt{1 + r^2} \right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2r \sqrt{1 + r^2} dr + r^4 \sqrt{1 + r^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \\ &- 4 \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \pi \left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} + 4\sqrt{3} - \\ &- 4 \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \left(4\sqrt{3} + \frac{2}{3} \right) \pi - 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \\ &= 2\pi \left(2\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right) - 4m. \end{aligned}$$

$$\text{Rezultă } 5m = \frac{2\pi}{3} (1 + 6\sqrt{3}), \text{ deci } m = \frac{2\pi}{15} (1 + 6\sqrt{3}).$$

Exercițiul 10.2.7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al emisferei materiale S dată prin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluție. Vom folosi formulele 10.1.4.2. Determinăm mai întâi masa emisferei $m = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$.

Ecuatiile parametrice ale emisferei S sunt $x = a \sin \theta \cos \varphi, y = a \sin \theta \sin \varphi,$

$z = a \cos \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$. Ca în exercițiul 10.3.3. obținem $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin \theta$ și $m =$

$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= a^3 \iint_D \sin^2 \theta d\theta d\varphi = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi a^3 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} a^3 \end{aligned}$$

Determinăm acum coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S x \sqrt{x^2 + y^2} dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) = 0 \\
y_G &= \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x, y, z) dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S y \sqrt{x^2 + y^2} dS = \\
&= \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) = 0 \\
z_G &= \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x, y, z) dS = \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S z \sqrt{x^2 + y^2} dS = \\
&= \frac{2}{\pi^2 a^3} \iint_S a^4 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Exercițiul 10.2.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu planul xOy al porțiunii de suprafață $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

Soluție. Momentul de inerție, în raport cu planul xOy este:

$$\begin{aligned}
I_{xOy} &= \iint_S z^2 \rho(x, y, z) dS = \iint_S z^2 (1 + xy) dS = \\
&= \iint_D (x^2 + y^2)(1 + xy) \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2)(1 + xy) dx dy, \\
&\text{unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}
\end{aligned}$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ obținem:

$$\begin{aligned}
I_{xOy} &= \sqrt{2} \iint_{D^*} r^2 (1 + r^2 \sin \theta \cos \theta) \cdot r dr d\theta = \\
&= \sqrt{2} \iint_{D^*} r^3 (1 + r^2 \sin \theta \cos \theta) dr d\theta = \sqrt{2} \iint_{D^*} r^3 dr d\theta + \\
&\quad + \sqrt{2} \iint_{D^*} r^5 \sin \theta \cos \theta dr d\theta = \\
&= \sqrt{2} \cdot 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 + \left(\int_0^1 r^5 dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

10. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMUL TIP

10.3. Exerciții propuse

Exercițiul 10.3.1. Să se calculeze:

a) $\iint_S \frac{1}{x+y+z} dS$, unde (S) este porțiunea din planul $x+y+z=a$ decupată de planele de coordonate;

b) $\iint_S z dS$, unde (S) este porțiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$;

c) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, unde (S) este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

d) $\iint_S (xy + z) dS$, unde (S) este porțiunea suprafeței conice $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de planul $z = 1$;

e) $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2} dS$, unde (S) este elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

R. a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{596}{15}\pi$; c) $\frac{8}{3}\pi a^4$; d) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$;

e) $\frac{4}{3}\pi abc(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})$.

Exercițiul 10.3.2. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0$, situată în semispațiul $z \geq 0$.

R. $(\pi - 2)a^2$

Exercițiul 10.3.3. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$ din paraboloidul hiperbolic $z = xy$.

R. $\frac{\pi}{6}[(1+a^2)^{3/2} - 1]$

Exercițiul 10.3.4. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ din conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

R. $\pi\sqrt{2}$

Exercițiul 10.3.5. Să se determine aria porțiunii de suprafață secționată de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ din conul $x = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

R. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$

Exercițiul 10.3.6. Să se determine aria porțiunii conului $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 2$.

R. $\pi\sqrt{5}$

Exercițiul 10.3.7. Să se determine masa porțiunii din suprafața conului omogen $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = ax$ și să se precizeze poziția centrului de greutate al acesteia.

$$\mathbf{R.} m = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2, \quad x_G = \frac{a}{2}, \quad y_G = 0, \quad z_G = \frac{16}{9} a$$

Exercițiul 10.3.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu axa Oz al porțiunii sferice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

$$\mathbf{R.} \quad \frac{\pi}{8} a^5.$$

Exercițiul 10.3.9. Se consideră suprafața conică omogenă

$$z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2. \text{ Se cere:}$$

a) poziția centrului de greutate

b) momentele sale de inerție în raport cu planele de coordonate.

$$\mathbf{R.} \text{ a) } x_G = y_G = 0, \quad z_G = \frac{2}{3} h; \text{ b) } I_{xOy} = \frac{1}{2} \pi h^2 a (a^2 + h^2)^{1/2};$$

$$I_{yOz} = I_{zOx} = \frac{1}{4} \pi a^3 (a^2 + h^2)^{1/2}.$$

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENTI

11.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

11.1.1. Elemente de teoria câmpurilor

Definiția 11.1.1. 1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. O funcție $U: D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **câmp scalar**.

Dacă $U: D \rightarrow \mathbb{R}$ este un câmp scalar fixat și $c \in \mathbb{R}$ este fixat, suprafața (S_c) de ecuație $U(x, y, z) = c$, se numește **suprafață de nivel constant** asociată câmpului U și numărului c .

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ și $c \in \mathbb{R}$ este fixat, curba (γ_c) de ecuație implicită $U(x, y) = c$, se numește **curba de nivel constant** asociată câmpului U și lui c .

Definiția 11.1.1.2. Fie A și B două puncte oarecare din \mathbb{R}^3 . Perechea ordonată (A, B) se numește **vector tangent la \mathbb{R}^3 în punctul A** (sau **segment orientat** sau **vector legat**) și se notează \vec{AB} . Punctul A se numește originea sau **punctul de aplicație al vectorului**.

Dacă $O = (0, 0, 0)$ este originea lui \mathbb{R}^3 , atunci \vec{OB} se numește **vectorul de poziție** al punctului B .

Punctul $V = B - A \in \mathbb{R}^3$ se numește **partea vectorială a vectorului tangent** și în loc de \vec{AB} putem nota \vec{V}_A sau chiar \vec{V} dacă punctul de aplicație se subînțelege.

Definiția 11.1.1.3. Doi vectori tangenți care au aceeași parte vectorială, dar au puncte de aplicație diferite se numesc **paraleli**.

Definiția 11.1.1.4. Dacă $A \in \mathbb{R}^3$ este fixat, mulțimea tuturor vectorilor tangenți la \mathbb{R}^3 în A se numește **spațiu tangent la \mathbb{R}^3 în punctul A** și se notează cu $T_A \mathbb{R}^3$.

Spațiul tangent se organizează ca spațiu vectorial cu operațiile

$$\vec{V}_A + \vec{W}_A = (\vec{V} + \vec{W})_A \text{ și } \lambda \cdot \vec{V}_A = \lambda \vec{V}_A$$

și este izomorf cu \mathbb{R}^3 , izomorfismul fiind dat de corespondența $V \rightarrow \vec{V}_A$.

Norma (lungimea) vectorului \vec{V}_A se definește prin

$$\|\vec{V}_A\| = \|V\|$$

Produsul scalar în $T_A \mathbb{R}^3$ se definește cu ajutorul produsului scalar din \mathbb{R}^3 prin

$$\left\langle \vec{V}_A, \vec{W}_A \right\rangle = \langle V, W \rangle.$$

Dacă $\langle V, W \rangle = 0$, atunci \vec{V}_A, \vec{W}_A se numesc ortogonali.

Un sistem ordonat de trei versori (vectori de normă 1) reciproc ortogonali, tangenți la \mathbb{R}^3 în A se numește **reper în punctul A** .

Dacă $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ este un reper în punctul A , atunci orice $\vec{V} \in T_A \mathbb{R}^3$ se scrie

$$\vec{V} = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_1 \right\rangle \cdot \vec{E}_1 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_2 \right\rangle \cdot \vec{E}_2 + \left\langle \vec{V}, \vec{E}_3 \right\rangle \cdot \vec{E}_3$$

Numerele reale $v_i = \left\langle \vec{V}, \vec{E}_i \right\rangle$, $i = 1, 2, 3$ se numesc **componentele lui \vec{V}** în raport cu reperul fixat.

Dacă notăm $\vec{i}_A = \overrightarrow{(1,0,0)}_A$, $\vec{j}_A = \overrightarrow{(0,1,0)}_A$, $\vec{k}_A = \overrightarrow{(0,0,1)}_A$ atunci reperul $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ se numește **reper natural** în punctul A, iar componentele unui vector în acest reper se numesc **componente euclidiene**.

Definiția 11.1.1.5 O funcție \vec{V} care asociază fiecărui punct A din $D \subset \mathbb{R}^3$ un vector $\vec{V}_A = \vec{V}(A)$, tangent la \mathbb{R}^3 în A se numește **câmp vectorial**.

Definiția 11.1.1.6. Dacă $\vec{V} : D \rightarrow \bigcup_{A \in D} T_A \mathbb{R}^3$ are proprietatea că $\vec{V}(A_1)$ este paralel cu $\vec{V}(A_2)$ pentru

orice $A_1, A_2 \in D$, atunci \vec{V} se numește **câmp vectorial paralel sau constant**.

Câmpurile paralele $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definite prin

$$\vec{i}(A) = \vec{i}_A, \quad \vec{j}(A) = \vec{j}_A, \quad \vec{k}(A) = \vec{k}_A$$

se numesc **câmpuri fundamentale**.

Se poate demonstra că, dacă $\vec{V} : D \rightarrow \bigcup_{A \in D} T_A \mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, atunci există trei funcții reale $V_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ astfel încât

$$\vec{V} = V_1 \cdot \vec{i} + V_2 \cdot \vec{j} + V_3 \cdot \vec{k}$$

Funcțiile scalare V_1, V_2, V_3 se numesc **componentele euclidiene** ale câmpului \vec{V} .

Se observă că orice câmp vectorial $\vec{V} : D \rightarrow \bigcup_{A \in D} T_A \mathbb{R}^3$ este echivalent cu o funcție vectorială

$$\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{V}(A) = (V_1(A), V_2(A), V_3(A))$$

unde $V_1, V_2, V_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt componentele euclidiene ale câmpului vectorial \vec{V} . Spunem că un câmp este de clasă C^k dacă componentele sale sunt de clasă C^k .

Definiția 11.1.1.7. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D.

Câmpul vectorial \vec{V} definit prin

$$\vec{V} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

se numește **câmp de gradienti** asociat câmpului scalar U.

Priu urmare, în orice punct $A \in D$, **gradientul câmpului scalar U** este

$$(\text{grad } U)(A) = \frac{\partial U}{\partial x}(A) \cdot \vec{i}_A + \frac{\partial U}{\partial y}(A) \cdot \vec{j}_A + \frac{\partial U}{\partial z}(A) \cdot \vec{k}_A$$

Proprietățile de calcul ale gradientului rezultă direct din proprietățile derivatelor parțiale.

Definiția 11.1.1.8. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, de componente $V_1, V_2, V_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$. Se numește **divergența** câmpului vectorial \vec{V} câmpul scalar

$$\text{div } \vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Se numește **rotorul** câmpului vectorial \vec{V} câmpul vectorial

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}$$

Această egalitate poate fi reținută ușor folosind scrierea formală

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

(“dezvoltând” acest determinant simbolic după prima linie)

Observația 11.1.1.1. Există o posibilitate de uniformizare a proprietăților de calcul ale gradientului, divergenței și rotorului, pentru câmpul de clasă C^1 , cu ajutorul unui operator simbolic:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

numit *operatorul lui Hamilton sau operatorul ∇ (nabla)*.

Cele trei operații de bază din calculul vectorial (înmulțirea cu scalari, produsul scalar, produsul vectorial) aplicate “vectorului” ∇ vor conduce la cei trei operatori diferențiali definiți anterior.

Astfel, convenind să definim “produsul” lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un câmp scalar ϕ ca fiind

$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$) obținem:

- dacă U este un câmp scalar de clasă C^1 , înmulțirea dintre “vectorul” ∇ și câmpul scalar U conduce la

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} = \text{grad } U$$

- dacă \vec{V} este un câmp vectorial de clasă C^1 de componente V_1, V_2, V_3 produsul scalar dintre “vectorul”

∇ și câmpul vectorial \vec{V} conduce la:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

- produsul vectorial dintre “vectorul” ∇ și câmpul vectorial \vec{V} conduce la

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{V}$$

Observația 11.1.1.2. Când un câmp descrie un fenomen care are anumite simetrii, atunci este mai comod a se lucra în alte coordonate decât cele carteziane, deoarece gradientul, divergența, rotorul au expresii mai simple.

De exemplu, dacă U este de forma $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2)$ atunci acest câmp se numește **câmp cu simetrie axială**, suprafețele de nivel constant sunt, în acest caz suprafețe cilindrice, iar studiul unui asemenea câmp se face ușor utilizând coordonatele cilindrice.

Analog, dacă $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$ atunci U este **câmp cu simetrie sferică**, suprafețele de nivel constant sunt sfere concentrice, având centrul în origine, iar pentru studiul unui asemenea câmp sunt indicate coordonatele sferice.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și $T: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ o schimbare de coordonate de componente f_1, f_2, f_3 și fie $D^* = T(D)$.

Punctul curent din D^* are coordonatele carteziene x, y, z și coordonatele curbilinii u, v, w astfel încât

$$\begin{cases} x = f_1(u, v, w) \\ y = f_2(u, v, w) \\ z = f_3(u, v, w) \end{cases}$$

Vectorul de poziție al punctului curent din D^* este

$$\vec{r} = f_1(u, v, w) \vec{i} + f_2(u, v, w) \vec{j} + f_3(u, v, w) \vec{k}$$

Notăm cu $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ versorii vectorilor $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_w$ și cu R_u, R_v, R_w normele acelorași vectori (parametrii lui Lamé):

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \vec{r}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \\ R_u &= \|\vec{r}_u\|, R_v = \|\vec{r}_v\|, R_w = \|\vec{r}_w\| \\ \vec{e}_u &= \frac{\vec{r}_u}{R_u}, \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{R_v}, \vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w}{R_w} \end{aligned}$$

Dacă $U: D^* \rightarrow \mathbb{R}$ este un câmp de scalari exprimat în coordonate carteziene. Acest câmp poate fi exprimat și în coordonate curbilinii considerând funcția

$$U^* = U \circ T.$$

Teorema 11.1.1.1. a) Dacă $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ este un reper ortogonal, atunci gradientul se exprimă astfel:

$$\text{grad } U^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u} \cdot \vec{e}_u + \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v} \cdot \vec{e}_v + \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

b) Pentru câmpul vectorial exprimat în coordonate carteziene prin

$$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \vec{i} + V_2(x, y, z) \vec{j} + V_3(x, y, z) \vec{k}$$

și în coordonate curbilinii prin

$$\vec{V}^*(u, v, w) = V_1^*(u, v, w) \vec{e}_u + V_2^*(u, v, w) \vec{e}_v + V_3^*(u, v, w) \vec{e}_w$$

rotorul și divergența se exprimă astfel:

$$\text{rot } \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w} \cdot \begin{vmatrix} R_u \vec{e}_u & R_v \vec{e}_v & R_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ R_u V_1^* & R_v V_2^* & R_w V_3^* \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (R_v R_w V_1^*) + \frac{\partial}{\partial v} (R_u R_w V_2^*) + \frac{\partial}{\partial w} (R_u R_v V_3^*) \right]$$

Observația 11.1.1.3. Punând în această ultimă formulă $V_I^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}$,

$V_2^* = \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}$, $V_3^* = \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}$ care sunt componentele vectorului $\text{grad } U^*$ deducem formula de calcul a laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } U^*) = \frac{1}{R_u R_v R_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{R_v R_w}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R_u R_w}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{R_u R_v}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w} \right) \right]$$

11.1.2. Integrala curbilinie de al doilea tip

Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum. Atunci când parametrul t crește de la a la b , punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ într-un sens pe care-l numim sens direct sau pozitiv. Când t scade de la b la a , punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ în sens invers.

Se numește *drum orientat* un drum pentru care s-a stabilit un sens de parcurgere a drumului.

Cum două drumuri echivalente au aceeași orientare, se poate vorbi despre orientarea unei curbe.

O curbă pentru care se precizează sensul de parcurgere a unui drum care îi aparține, se numește *curbă orientată*.

Definiția 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted și orientat, definit prin $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$ și $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa.

Fie \vec{V} un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d .

Considerăm suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{V} \circ \gamma \right) (\theta_i) \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} \right) = \sum_{i=1}^n [V_1(\gamma(\theta_i))(f(t_i) - f(t_{i-1})) + V_2(\gamma(\theta_i))(g(t_i) - g(t_{i-1})) + V_3(\gamma(\theta_i))(h(t_i) - h(t_{i-1}))]$$

Câmpul vectorial \vec{V} se numește *integrabil în raport cu coordonatele pe drumul γ* dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d cu $\|d\| < \delta$ și orice sistem θ de puncte intermediare, să avem:

$$\left| \sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) - I \right| < \varepsilon$$

Numărul I se numește *integrala curbilinie în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de al doilea tip* a câmpului vectorial \vec{V} pe drumul γ .

Se notează $I = \int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ (unde \vec{r} este vectorul de poziție

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ al punctului curent pe (γ)) sau

$$I = \int_{\gamma} V_1(x, y, z) dx + V_2(x, y, z) dy + V_3(x, y, z) dz$$

Observația 11.1.2.1. Se poate demonstra că dacă \vec{V} este integrabil în raport cu coordonatele pe un drum γ , atunci el este integrabil pe orice alt drum din clasa de echivalență a lui γ și valoarea integralei e aceeași. Aceasta justifică folosirea denumirii de integrală curbilinie.

Teorema 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted și orientat definit prin $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ și $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie \vec{V} un câmp vectorial de componente continue $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci \vec{V} este integrabil în raport cu coordonatele pe γ și are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r} = \int_a^b [V_1(\gamma(t)) \cdot f'(t) + V_2(\gamma(t)) \cdot g'(t) + V_3(\gamma(t)) \cdot h'(t)] dt$$

Teorema 11.1.2.2. (Proprietățile integralei curbilinii de al doilea tip)

a) Dacă \vec{V}_1 și \vec{V}_2 sunt două câmpuri vectoriale integrabile în raport cu coordonatele pe drumul neted și orientat γ , atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} (\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2) d\vec{r} = \alpha \int_{\gamma} \vec{V}_1 d\vec{r} + \beta \int_{\gamma} \vec{V}_2 d\vec{r}$$

b) Dacă \vec{V} este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe γ_1, γ_2 , atunci \vec{V} este integrabil în raport cu coordonatele pe $\gamma_1 \cup \gamma_2$ și

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{V} d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{V} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V} d\vec{r}$$

c) Dacă \vec{V} este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe drumul neted γ , atunci \vec{V} este integrabil și pe opusul γ^* al lui γ și

$$\int_{\gamma^*} \vec{V} d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$$

Teorema 11.1.2.3. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ un drum orientat și \vec{V} un câmp vectorial de componente $V_1, V_2 : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Atunci \vec{V} este integrabil în raport cu coordonatele pe γ și are loc egalitatea:

$$\int_{\gamma} V_1(x, y) dx + V_2(x, y) dy = \int_a^b [V_1(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + V_2(f(t), g(t)) \cdot g'(t)] dt$$

Observația 11.1.2.2. a) Pentru a pune în evidență faptul că o integrală curbilinie este calculată pe o curbă simplă, închisă, parcursă în sens pozitiv (lăsând în stânga domeniul mărginit de ea) se folosește notația

$$\oint_{\gamma} V_1(x, y) dx + V_2(x, y) dy$$

b) *Lucrul mecanic* efectuat de un câmp de forțe \vec{V} care acționează asupra unui punct material deplasându-l pe imaginea drumului γ este

$$L = \int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}.$$

11.1.3. Independența de drum a integralelor curbilinii de al doilea tip. Caracterizarea câmpurilor de gradienti.

Definiția 11.1.3.1. Un câmp vectorial \vec{V} de clasă C^1 se numește *câmp potențial* sau *câmp de gradienti* pe mulțimea D dacă există un câmp scalar $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{V} = \text{grad } U$, adică

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \vec{k}$$

pentru orice $(x, y, z) \in A$.

Câmpul U se numește *potențialul scalar* al câmpului vectorial \vec{V} .

Observația 11.1.3.1. Un câmp de gradienti are o infinitate de potențiale scalare, care diferă între ele printr-un câmp constant.

Teorema 11.1.3.1. Fie \vec{V} un câmp de gradienti pe mulțimea $D \subset \mathbb{R}^3$ și $U : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potențial scalar al său. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un drum neted și orientat. Atunci:

$$\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

(formula Leibnitz-Newton pentru integrala curbilinie a câmpurilor de gradienti)

Teorema 11.1.3.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime *deschisă și conexă* și \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 pe D . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) \vec{V} este câmp de gradienti în D ;
- b) pentru orice $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ drum neted, orientat și închis

(adică $\gamma(a) = \gamma(b)$), are loc relația $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r} = 0$;

- c) oricare ar fi două drumuri netede și orientate $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$, $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ cu $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ și $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, avem:

$$\int_{\gamma_1} \vec{V} d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{V} d\vec{r}$$

Observația 11.1.3.2. Un drum neted, orientat și închis se numește *contur*, iar $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ se mai numește

circulația câmpului vectorial \vec{V} pe conturul γ .

Teorema anterioară se poate enunța și astfel:

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime deschisă și conexă și \vec{V} este un câmp vectorial de clasă C^1 pe D , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) \vec{V} este câmp de gradienti în D ;
- b) circulația lui \vec{V} pe orice contur din D este nulă;

c) $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ este independentă de γ , depinzând numai de capetele drumului, în D.

Teorema 11.1.3.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime deschisă și conexă

$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \vec{i} + V_2(x, y, z) \vec{j} + V_3(x, y, z) \vec{k}$, $(x, y, z) \in D$ un câmp de gradienti în D și $(x_0, y_0, z_0) \in D$ fixat.

Atunci $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x V_1(t, x_0, y_0) dt + \int_{y_0}^y V_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z V_3(x, y, t) dt$$

este un potențial scalar al lui \vec{V} .

Observația 11.1.3.3. Alegând alt punct (x_0, y_0, z_0) se obține un alt potențial scalar al lui \vec{V} , care diferă de primul printr-un câmp constant.

Definiția 11.1.3.2. Un câmp vectorial de clasă C^1 se numește *irotațional* sau *conservativ* dacă $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$.

Observația 11.1.3.4. a) Dacă V_1, V_2, V_3 sunt componentele lui \vec{V} , atunci \vec{V} este conservativ dacă și numai dacă au loc egalitățile

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

b) Dacă U este câmp scalar de clasă C^2 , atunci $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$, prin urmare, orice câmp de gradienti este câmp conservativ, dar reciproca nu este în general adevărată. Spre exemplu:

$$\vec{V}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \vec{j}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$
 este conservativ (adică $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$) dar

nu este câmp de gradienti (pentru că circulația lui \vec{V} pe cercul $x^2 + y^2 = 1$ este 2π)

Teorema 11.1.3.4. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă, stelată, iar \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 pe D.

Atunci, \vec{V} este câmp de gradienti dacă și numai dacă este câmp conservativ.

Să reamintim că $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime stelată dacă există

$(x_0, y_0, z_0) \in S$ astfel încât oricare ar fi $(x, y, z) \in A$, segmentul de extremități (x_0, y_0, z_0) și (x, y, z) (adică imaginea curbei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = ((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty, (1-t)z_0 + tz)$) este conținut în D.

Deoarece orice mulțime stelată este conexă, deducem::

Teorema 11.1.3.5. Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime deschisă și stelată, iar \vec{V} este un câmp vectorial de clasă C^1 în D, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- \vec{V} este un câmp de gradienti în D;
- circulația lui \vec{V} pe orice contur din D este nulă;
- integrala $\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{r}$ este independentă de γ pe D;

- d) \vec{V} este un câmp conservativ pe D;
 e) sunt adevărate (în D) egalitățile:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

Observația 11.1.3.5. În multe lucrări de specialitate, noțiunea de mulțime deschisă și stelată este înlocuită cu cea similară de domeniu simplu conex, a cărei definiție (în \mathbb{R}^3) necesită cunoștințe de teoria suprafețelor. De aceea a fost preferată noțiunea folosită în teoremele anterioare.

Folosirea noțiunilor de “câmp de gradienti” și “câmp conservativ” în locul noțiunii de “diferențială totală exactă” este justificată prin aplicațiile directe ale teoriei câmpurilor.

Observația 11.1.3.6. Independența de drum a integralei curbilinii de speța a II-a este importantă pentru a observa în ce condiții lucrul mecanic efectuat de câmpul de forțe $\vec{F}(x, y, z)$ pentru a deplasa un punct material din

$M(x_0, y_0, z_0)$ în $N(x_1, y_1, z_1)$ nu depinde de drumul parcurs, ci doar de extremitățile sale.

Cele mai importante câmpuri de forțe pentru care lucrul mecanic este independent de drum sunt:

- Forța de greutate $\vec{F} = -mg \vec{k}$;
- Forța de atracție newtoniană $\vec{F} = -\frac{k}{r^3} \cdot \vec{r}$
- Forța elastică $\vec{F} = -k^2 \vec{r}$;

(aici $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ și $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENT

11.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 11.2.1. Fie câmpul scalar $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

a) Să se determine $(\text{grad } U)(1, 1, 1)$

b) Să se determine $\frac{\partial U}{\partial v}(1, 1, 1)$, unde \vec{v} este versorul gradientului în punctul $(1, 1, 1)$

Soluție. a) $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = \frac{\partial U}{\partial x}(1, 1, 1) \cdot \vec{i}_A + \frac{\partial U}{\partial y}(1, 1, 1) \cdot \vec{j}_A + \frac{\partial U}{\partial z}(1, 1, 1) \cdot \vec{k}_A$ unde $A = (1,$

$1, 1)$ iar $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ este reperul natural în $T_A\mathbb{R}^3$. Rezultă $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = 2(\vec{i}_A + \vec{j}_A + \vec{k}_A)$.

b) $\frac{\partial U}{\partial v}(1, 1, 1) = \vec{v} \cdot (\text{grad } U)(1, 1, 1) = \frac{(\text{grad } U)(1, 1, 1)}{\|(\text{grad } U)(1, 1, 1)\|} \cdot (\text{grad } U)(1, 1, 1) = \|(\text{grad } U)(1, 1, 1)\| = \sqrt{12}$

Exercițiul 11.2.2. Să se determine divergența și rotorul câmpului vectorial

$$\vec{V} = x^2yz \cdot \vec{i} + xy^2z \cdot \vec{j} + xyz^2 \cdot \vec{k}$$

Soluție. Notând $V_1(x, y, z) = x^2yz$, $V_2(x, y, z) = xy^2z$, $V_3(x, y, z) = xyz^2$ rezultă:

$$(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 6xyz$$

$$(\text{rot } \vec{V})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (xz^2 - xy^2) \cdot \vec{i} + (x^2z - yz^2) \cdot \vec{j} + (y^2z - x^2z) \cdot \vec{k}.$$

Exercițiul 11.2.3. Să se demonstreze că $\vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ unde \vec{r} este vectorul de poziție și $r = \|\vec{r}\| \neq 0$, este un câmp vectorial solenoidal.

Soluție. Deoarece $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ rezultă

$$\vec{V} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

Calcul direct arată că $(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = 0$, deci \vec{V} este solenoidal pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exercițiul 11.2.4. Să se demonstreze că

$$\vec{V} = yz(2x + y + z) \cdot \vec{i} + zx(x + 2y + z) \cdot \vec{j} + xy(x + y + 2z) \cdot \vec{k}$$

este un câmp vectorial irotațional.

Soluție. Fie $V_1(x, y, z) = yz(2x + y + z)$, $V_2(x, y, z) = zx(x + 2y + z)$ și $V_3(x, y, z) = xy(x + y + 2z)$.

$$\text{Deoarece } \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) = x(x + 2y + 2z)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, z) = y(2x + y + 2z)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, z) = z(2x + 2y + z)$$

rezultă că $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ în \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 11.2.5. Să se calculeze $I = \int_{\gamma} x dx + e^x dy$, unde γ este definită de ecuațiile parametrice $x = \ln(1+t)$,

$y = \sqrt{1+t}$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } I &= \int_{\gamma} x dx + e^x dy = \int_0^1 \left[\ln(1+t) \cdot \frac{1}{1+t} + e^{\ln(1+t)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{\sqrt{1+t}}{2} \right] dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2(1+t) + \frac{1}{3} \sqrt{(1+t)^3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2)^2 + \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Exercițiul 11.2.6. Să se calculeze $I = \int_{\gamma} y dx - x dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz$, unde γ este dată de

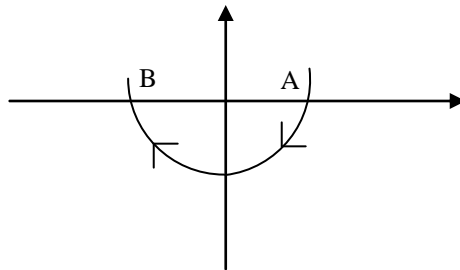
reprezentarea parametrică $x = -t \cos t + \sin t$,
 $y = t \sin t + \cos t$, $z = t + 1$, $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } I &= \int_{\gamma} y dx - x dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz = \\ &= \int_0^1 [(t \sin t + \cos t)(t \sin t) - (-t \cos t + \sin t)(t \cos t) + \\ &+ [(-t \cos t + \sin t)^2 + (t \sin t + \cos t)^2 + (t+1)^2] dt = \\ &= \int_0^{\pi} (3t^2 + 2t + 2) dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi. \end{aligned}$$

Exercițiul 11.2.7. Să se calculeze $\int_{\gamma} (y+1) dx + x^2 dy$, unde (γ) este porțiunea din parabola $y = x^2 - 1$

cuprinsă între punctele A(1, 0) și B(-1, 0), având originea în A.

Soluție. Curba este dată prin ecuația sa explicită.



Ecuțiile parametrice se deduc imediat:

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

Punctul A(1, 0) corespunde valorii $t = 1$ și punctul B(-1, 0) corespunde valorii $t = -1$.

Integrala va fi:

$$I = \int_{-1}^1 [(t^2 - 1 + 1) + t^2 \cdot 2t] dt = - \int_{-1}^1 (2t^3 + t^2) dt = -2 \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{3}$$

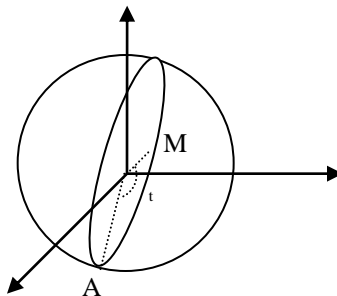
Exercițiul 11.2.8. Să se calculeze

$$\oint_{\gamma} (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$$

unde γ este dat de ecuațiile implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y + z = 0$ și are originea și capătul în

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soluție.



Ecuțiile parametrice ale cercului aflat la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu planul $x - y + z = 0$ se obțin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = y \\ (x + z)^2 - 2xz = 1 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ xz = \frac{2y^2 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \frac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = \frac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \frac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases}, y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$$

care reprezintă ecuația celor două semicercuri ce formează cercul γ .

Pentru calculul integralei curbilinii este utilă notația $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin t$

$t \in [0, 2\pi]$. Ecuațiile parametrice ale lui γ devin:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

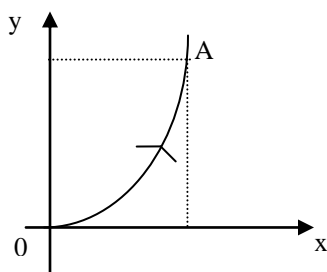
Integrala curbilinie este:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} & \left[\left(\frac{2}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{6}} \cos t \right) + \right. \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cos t \right) + \\ & \left. \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \right] dt = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Exercițiul 11.2.9. În fiecare punct al unui plan, un punct material este acționat de forța \vec{F} ale cărei proiecții pe axe de coordonate sunt

$F_1(x, y) = xy$, $F_2(x, y) = x + y$. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} , când punctul material se deplasează din origine în $A(1, 1)$ pe parabola $y = x^2$.

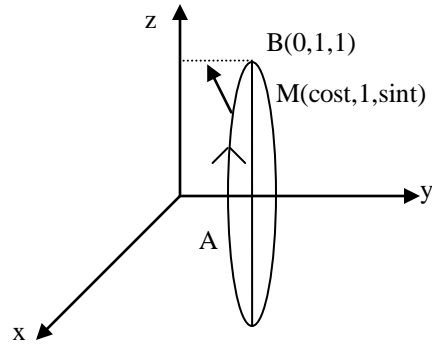
Soluție. Ecuațiile parametrice ale lui γ sunt: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$.



Pentru $O(0, 0)$ obținem $t = 0$, iar pentru $A(1, 1)$ obținem $t = 1$.

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_{\gamma} xy dx + (x + y) dy = \\ &= \int_0^1 [t \cdot t^2 \cdot 1 + (t + t^2) \cdot 2t] dt = \left(\frac{3}{4} t^4 + \frac{2}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}. \end{aligned}$$

Exercițiul 11.2.10. Fie \vec{F} o forță variabilă având mărimea invers proporțională cu distanța de la punctul ei de aplicație la axa Oz , dirijată după perpendiculara pe această axă și îndreptată spre ea. Să se determine lucrul mecanic efectuat prin deplasarea unui punct material sub acțiunea acestei forțe pe cercul $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ din punctul $(1, 1, 0)$ în punctul $(0, 1, 1)$ în sens direct față de direcția pozitivă a axei Oy .



Din datele problemei rezultă:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x \vec{i} - y \vec{j})$$

Curba pe care se deplasează punctul are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Lucrul mecanic este:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \frac{k}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} [(-\cos t) \sin t + 1 \cdot 0] dt = \\ &= k \sqrt{1 + \cos^2 t} \Big|_0^{\pi/2} = k(1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Exercițiul 11.3.12. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y) = (2xy + y^2) \cdot \vec{i} + (x^2 + 2xy) \cdot \vec{j}$$

este un câmp de gradienti în \mathbb{R}^2 și să se determine un potențial scalar pentru acest câmp.

Soluție. \mathbb{R}^2 este o mulțime deschisă și stelată. Dacă $V_1(x, y) = 2xy + y^2$ și $V_2(x, y) = x^2 + 2xy$, atunci

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y, \text{ pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ deci } \vec{V} \text{ este câmp de gradienti.}$$

Un potențial scalar al său este:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x V_1(t, 0) dt + \int_0^y V_2(x, t) dt = \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y (x^2 + 2xt) dt = (x^2 t + xt^2) \Big|_0^y = x^2 y + xy^2 \end{aligned}$$

Exercițiul 11.3.13. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y, z) = y^2 z \cdot \vec{i} + (2xyz + 1) \cdot \vec{j} + xy^2 \cdot \vec{k}$$

este un câmp de gradienti în \mathbb{R}^3 și să se determine un potențial scalar al său.

Soluție. Cu notațiile obișnuite obținem:

$$V_1(x, y, z) = y^2 z, V_2(x, y, z) = 2xyz + 1, V_3(x, y, z) = xy^2.$$

Deoarece \mathbb{R}^3 este mulțime deschisă și stelată și

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = 2yz; \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x} = y^2; \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y} = 2xy$$

rezultă că \vec{V} e câmp de gradienti.

Un potențial scalar al său este :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_0^x V_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y V_2(x, t, 0) dt + \int_0^z V_3(x, y, t) dt = \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y 1 dt + \int_0^z xy^2 dt = y + xy^2 z \end{aligned}$$

Exercițiul 11.3.14. Se consideră câmpul vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{k}.$$

Să se demonstreze că \vec{V} este conservativ pe mulțimea deschisă

$$D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$$

și să se calculeze circulația lui \vec{V} pe cercul $\gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 1$ parcurs o dată pozitiv în raport cu semiaxa Oz.

Soluție. Avem:

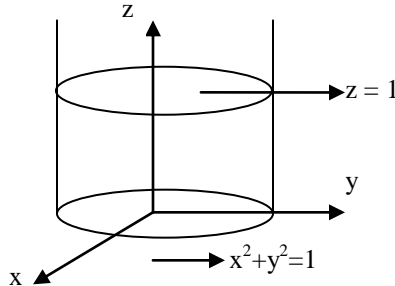
$$V_1(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, V_2(x, y, z) = \frac{2y}{x^2 + y^2}, V_3(x, y, z) = 2z.$$

$$\text{Deoarece } \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) = 0,$$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu $x^2 + y^2 > 0$ rezultă că \vec{V} este câmp conservativ pe domeniul său de definiție, mulțimea $D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \neq 0\}$.



Cercul γ este intersecția suprafeței cilindrice de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ cu planul de ecuație $z = 1$. Ecuațiile sale parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1, t \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

$$\text{Circulația lui } \vec{V} \text{ pe } \gamma \text{ este } \oint_{\gamma} \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy + 2z dz =$$

$$\int_0^{2\pi} [2 \cos t (-\sin t) + 2 \sin t \cos t + 2 \cdot 1 \cdot 0] dt = \int_0^{2\pi} 0 \cdot dt = 0.$$

Să observăm că teorema 11.1.3.5. nu poate fi aplicată deoarece mulțimea A nu este o mulțime stelată.

Exercițiul 11.3.15. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța de greutate \vec{G} pentru a deplasa punctul material de masă m din poziția $A(x_1, y_1, z_1)$ în poziția $B(x_2, y_2, z_2)$.

Soluție. $\vec{G}(x, y, z) = -mg \vec{k}$ este un câmp conservativ pe \mathbb{R}^3 , care este mulțime deschisă și stelată. Un potențial scalar al său este

$U(x, y, z) = -mgz$. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -mg dz \cdot \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mgz \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = mg(z_1 - z_2)$$

Exercițiul 11.3.16. Să se determine lucrul mecanic realizat de forța elastică $\vec{F} = -k^2 \vec{r}$, pentru a deplasa un punct material din $A(x_1, y_1, z_1)$ în $B(x_2, y_2, z_2)$.

Soluție. $\vec{F}(x, y, z) = -k^2x \cdot \vec{i} - k^2y \cdot \vec{j} - k^2z \cdot \vec{k}$ este un câmp de gradienti pe \mathbb{R}^3 și un potențial scalar al său este:

$$U(x, y, z) = \int_0^x -k^2 t dt + \int_0^y -k^2 t dt + \int_0^z -k^2 t dt = -\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Atunci } L = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{k^2}{2} \left((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \right).$$

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENTI

11.3. Exerciții propuse

Exercițiul 11.3.1. Să se determine $(\text{grad } U)(2, 1)$ unde

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

R. $\frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$

Exercițiul 11.3.2. Să se determine punctele în care norma gradientului câmpului $U(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ este egală cu 2.

R. $\{(x, y): x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\}$

Exercițiul 11.3.3. Dacă ϕ și ψ sunt funcții reale diferențiabile iar c este o funcție constantă, arătați că:

- a) $\text{grad}(\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi$
- b) $\text{grad}(c + \phi) = \text{grad } \phi$
- c) $\text{grad}(c \cdot \phi) = c \cdot \text{grad } \phi$
- d) $\text{grad}(\phi \cdot \psi) = \phi \cdot \text{grad } \psi + \psi \cdot \text{grad } \phi$
- e) $\text{grad}(\phi^n) = n \cdot \phi^{n-1} \cdot \text{grad } \phi, n \in \mathbb{N}^*$

Exercițiul 11.3.4. Să se determine divergența și rotorul următoarelor câmpuri vectoriale:

- a) $\vec{V}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$
- b) $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2) \cdot \vec{i} + (z^2 + x^2) \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$
- c) $\vec{V}(x, y, z) = \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$

R. a) $\text{div } \vec{V} = 3, \text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ b) $\text{div } \vec{V} = 0,$

$\text{rot } \vec{V} = 2[(y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}];$ c) $\text{div } \vec{V} = 6, \text{rot } \vec{V} = \vec{0}.$

Exercițiul 11.3.5. Demonstrați că dacă ϕ este un câmp scalar, \vec{V} un câmp vectorial, ambele de clasă C^1 , atunci

$$\text{div}(\phi \cdot \vec{V}) = \phi \cdot \text{div } \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{grad } \phi$$

Exercițiul 11.3.6. Demonstrați că dacă \vec{V} este un câmp vectorial de clasă C^1 , iar \vec{a} este un câmp constant, atunci

$$\vec{a} \cdot [\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{a}) - \text{rot}(\vec{V} \times \vec{a})] = \text{div } \vec{V}.$$

Exercițiul 11.3.7. Demonstrați că dacă U este un câmp scalar, \vec{V} un câmp vectorial, ambele de clasă C^2 , atunci:

a) $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$

$$b) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{V}) = 0$$

$$c) \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

Exercițiul 11.3.8. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip, pe curba γ parcursă în sens direct.

$$a) \int_{\gamma} \frac{dx}{x^2 + y^2}; \gamma: x = a \cos t, y = a \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b) \int_{\gamma} (\arcsin y) dx + x^2 dy; \gamma: x = -t, y = \sqrt{1-t^2}, t \in [-1, 1]$$

$$c) \int_{\gamma} \sqrt{yz} dx + \sqrt{zx} dy + \sqrt{xy} dz; \gamma: x = t, y = t^2, z = t^3, t \in [0, 1]$$

$$d) \int_{\gamma} z\sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz;$$

$$\gamma: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\mathbf{R.} \ a) -\frac{1}{a}; b) -\pi; c) \frac{61}{42}; d) \frac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$$

Exercițiul 11.3.9. Calculați următoarele integrale curbilinii de al doilea tip.

$$a) \int_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy, \text{ unde } \gamma \text{ este arcul de parabolă } y = x^2 \text{ ce unește punctele } A(1, 1) \text{ și } B(2, 4) \text{ parcurs în sens direct.}$$

$$b) \int_{\gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \text{ unde } \gamma \text{ este cercul } x^2 + y^2 = a^2, \text{ parcurs în sensul invers acelor de ceasornic.}$$

$$c) \int_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy, \text{ unde } \gamma \text{ este arcul elipsei } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ aflat deasupra axei } Ox \text{ și parcurs în sensul acelor de ceasornic.}$$

$$d) \int_{\gamma} \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}, \text{ unde } \gamma \text{ este bucla lemniscatei } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \text{ pentru care } x \geq 0, \text{ parcursă în sens invers acelor de ceasornic.}$$

$$\mathbf{R.} \ a) \frac{1219}{30}; b) -2\pi; c) \frac{4}{3}ab^2; d) 0$$

Exercițiul 11.3.10. Să se calculeze $\int_{\gamma} 2xy dx - x^2 dy$ pe următoarele curbe ce au extremitatea inițială în $O(0, 0)$ și cea finală în $A(2, 1)$.

$$a) y = \frac{1}{2}x$$

$$b) y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

- c) linia poligonală OBA cu B(2, 0)
d) linia poligonală OCA cu C(0, 1)

R. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{12}{5}$; c) -4; d) 4.

Exercițiul 11.3.11. Să se calculeze $\int_{\gamma} 2xydx + x^2dy$ în aceleași ipoteze ca în exercițiul 11.4.20.

R. 4 în toate cele patru cazuri.

Exercițiul 11.3.12. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\int_{\gamma} xydx + yzdy + zxdz$, unde γ este curba de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$ parcursă în sens direct;

b) $\int_{\gamma} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, unde γ este elipsa $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$, cu $a, h > 0$, parcursă

în sens invers acelor de ceasornic dacă se privește din partea pozitivă a axei Oz.

c) $\int_{\gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, unde γ este curba lui Viviani, definită de ecuațiile: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 =$

ax , $a > 0$, $z \geq 0$, curbă parcursă în sensul acelor de ceasornic, privită din partea pozitivă a axei Ox.

R. a) $R^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \right)$;

b) Ecuațiile parametrice sunt $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $z = h(1 - \cos t)$,
 $t \in [0, 2\pi]$. $I = -2\pi b(a + h)$

c) Ecuațiile parametrice ale lui γ sunt $x = a \sin^2\theta$, $y = a \sin\theta \cos\theta$, $z = a \cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. $I = \frac{\pi}{4} a^3$.

Exercițiul 11.3.13. Arătați că următoarele câmpuri vectoriale sunt câmpuri de gradienti pe domeniul maxim de definiție și calculați un potențial scalar al lor.

a) $\vec{V}(x, y) = (2x + 3y) \cdot \vec{i} + (3x - 4y) \cdot \vec{j}$

b) $\vec{V}(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2) \cdot \vec{i} - (x^2 - 2xy + 3y^2) \cdot \vec{j}$

c) $\vec{V}(x, y) = e^{x-y}[(1+x+y) \cdot \vec{i} + (1-x-y) \cdot \vec{j}]$

d) $\vec{V}(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} [yz(1+2x^2) \cdot \vec{i} + xz(1+2y^2) \cdot \vec{j} + xy(1+2z^2) \cdot \vec{k}]$

R. a) $U(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$; b) $U(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$;

c) $U(x, y) = (x + y)e^{x-y}$; d) $U(x, y, z) = xyz e^{x^2+y^2+z^2}$

Exercițiul 11.3.14. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip pe o curbă netedă, orientată, arbitrară, pentru care se precizează doar extremitățile:

a) $\int_{(0,b)}^{(a,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$

b) $\int_{(1,4)}^{(9,1)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} dy$, pe o curbă din primul cadran

c) $\int_{(0,0,0)}^{(3,9,5)} x^2 dx + \sqrt{y} dy - z\sqrt{z} dz$, pe o curbă cu imaginea aflată în regiunea $y \geq 0, z \geq 0$.

d) $\int_{(-1,0,1)}^{(2,3,4)} e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz)$

R. a) $-b^2$; b) 1; c) $27 - 10\sqrt{5}$; d) $e^{24} - 1$

12. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.1. Noțiuni teoretice și rezultate fundamentale

12.1.1. Suprafețe orientabile

Considerăm o suprafață netedă și simplă, reprezentată de pânza
 $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ injectivă, de clasă C^1 , cu imaginea (S). Pentru orice punct $M \in (S)$ există și este unic un punct
 $(u, v) \in D$, astfel încât $M = S(u, v)$. În punctul M există doi versori normali la (S) și anume:

$$\frac{\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r_u & \mathbf{x} & r_v \end{matrix}}{\left\| \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r_u & \mathbf{x} & r_v \end{matrix} \right\|} \text{ și } - \frac{\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r_u & \mathbf{x} & r_v \end{matrix}}{\left\| \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ r_u & \mathbf{x} & r_v \end{matrix} \right\|}$$

Definiția 12.1.1.1. Suprafața (S) se numește *orientabilă* (sau cu două fețe) dacă funcția care asociază
 fiecărui punct $M \in (S)$ unul din cei doi versori normali la (S) în punctul M este o funcție continuă. O
 suprafață orientabilă împreună cu o alegere a unuia din cei doi versori se numește suprafață *orientată*.

Exemplul 12.1.1.1. Orice suprafață netedă definită explicit de ecuația
 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ este orientabilă: dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei, astfel încât
 aceasta să facă un unghi ascuțit cu sensul pozitiv al axei Oz, spunem că suprafața este *orientată pozitiv* sau
 că alegem *fața superioară* a suprafeței, în caz contrar, spunem că suprafața este *orientată negativ* sau că
 alegem *fața inferioară*.

Exemplul 12.1.1.2. Orice suprafață (S) netedă, simplă și închisă este orientabilă. În acest caz există două
 domenii D_1, D_2 încât $\text{Fr } D_1 = \text{Fr } D_2 = (S)$, $D_1 \cup D_2 \cup (S) = \mathbb{R}^3$, D_1 mărginit, D_2 nemărginit. Dacă în fiecare
 punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_2 , obținem *fața exterioară*; dacă în
 fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_1 , obținem *fața interioară*.

Observația 12.1.1.1. Dacă $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $S_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sunt două pânze netede, simple, nesingulare
 echivalente și dacă $T : D \rightarrow D_1$, este difeomorfism, astfel încât $S_1 \circ T = S$, cu jacobianul strict pozitiv în
 fiecare punct, atunci (S) și (S_1) coincid și au aceeași orientare (versorul normală este independent de
 reprezentarea parametrică aleasă)

12.1.2. Integrala de suprafață de al doilea tip

Definiția 12.1.2.1. Considerăm o suprafață netedă și orientată, definită parametric prin $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$,
 $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil și fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie

\vec{V} un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (S) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $d = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ o diviziune arbitrară a
 domeniului D. Fie ξ un sistem arbitrar de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$
 unde

$(S_i) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D_i\}$. Fie T_i domeniul corespunzător lui (S_i) în planul tangent la (S)

în punctul (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, \dots, n$ și \vec{n}_i , versorul normalei la suprafață în acest punct. Câmpului vectorial

\vec{V} , diviziunii d și sistemului ξ le asociem suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(d, \xi) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_i \right) \cdot \text{aria}(T_i)$$

Câmpul vectorial \vec{V} se numește *integrabil în raport cu coordonatele pe (S)*, dacă există $J_2 \in \mathbb{R}$
 încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \eta$ și oricare ar fi sistemul
 ξ de puncte intermediare, să avem:

$$\left| \sigma_{\vec{V}}(d, \xi) - J_2 \right| < \varepsilon$$

Numărul J_2 se numește *integrala de suprafață de al doilea tip* sau în raport cu coordonatele a câmpului vectorial \vec{V} și se notează

$$J_2 = \iint_S V_1(x, y, z) dydz + V_2(x, y, z) dzdx + V_3(x, y, z) dxdy$$

Observația 12.1.2.1. Dacă \vec{V} este câmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid care trece printr-o suprafață, atunci numărul J_2 reprezintă fluxul câmpului vectorial \vec{V} prin suprafața orientată (S).

Teorema 12.1.2.1. Considerăm o suprafață netedă și orientată și $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Dacă \vec{V} este un câmp vectorial având componentele:

$V_1, V_2, V_3 : (S) \rightarrow \mathbb{R}$, continue pe (S), atunci \vec{V} este integrabil în raport cu coordonatele și are loc egalitatea:

$$\iint_S V_1(x, y, z) dydz + V_2(x, y, z) dzdx + V_3(x, y, z) dxdy = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

unde \vec{n} este versorul orientat al normalei la (S) în punctul curent.

Observația 12.1.2.2. a) Dacă ținem seama de formula de calcul a integralei de suprafață de primul tip și de faptul că

$$\vec{n} = \frac{A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

obținem regula de calcul:

$$\iint_S V_1(x, y, z) dydz + V_2(x, y, z) dzdx + V_3(x, y, z) dxdy = \iint_D (\tilde{V}_1 \cdot A + \tilde{V}_2 \cdot B + \tilde{V}_3 \cdot C) dudv$$

unde $\tilde{V}_i(u, v) = V_i(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $i = 1, 2, 3$.

Dacă se consideră cealaltă orientare a suprafeței (S) în membrul drept apare semnul minus.
b) Dacă folosim scrierea vectorială, obținem:

$$\iint_S V_1(x, y, z) dydz + V_2(x, y, z) dzdx + V_3(x, y, z) dxdy = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{V} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|} dS =$$

$$\iint_S \frac{\begin{pmatrix} \vec{V} & \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix}}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|} dS = \iint_D \begin{pmatrix} \vec{V} & \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} dudv =$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \tilde{V}_1 & \tilde{V}_2 & \tilde{V}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

c) Dacă suprafața este dată explicit de ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil, atunci versorul normalei corespunzător feței superioare este:

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

iar versorul normalei corespunzător feței inferioare este $-\vec{n}$. În practică, fixarea orientării se face în funcție de context.

d) Din teorema 12.1.2.1. rezultă că integrala de suprafață de al doilea tip, ca și cea de primul tip, este independentă de parametrizarea lui (S) , în sensul că pentru două pânze echivalente, cu aceeași orientare, valoarea integralei este aceeași și diferă doar prin semn, dacă se schimbă orientarea.

12.1.3. Formule integrale

Formulele integrale stabilesc legături între unele tipuri de integrale considerate anterior și pot fi folosite pentru a facilita calculul acestora.

Definiția 12.1.3.1. O mulțime $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește *domeniu compact elementar* dacă satisface următoarele condiții:

- a) este domeniu compact;
- b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Ox ;
- c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Oy ;
- d) frontiera sa, $Fr D$, este reuniunea unui număr finit de imagini de curbe plane, netede, nesingulare, simple, închise și este orientată pozitiv, adică în sensul de deplasare al unui observator pe $Fr D$, astfel încât să lase domeniul D în stânga.

Teorema 12.1.3.1. (Formula Green-Riemann)

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact elementar și

$\vec{V}(x, y) = V_1(x, y) \cdot \vec{i} + V_2(x, y) \cdot \vec{j}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce include pe D . Atunci:

$$\oint_{FrD} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Observația 12.1.3.1. Dacă $\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}$, atunci $\oint_{FrD} \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0$.

Teorema 12.1.3.2. Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este domeniu compact elementar, atunci :

$$\text{aria}(D) = \frac{1}{2} \oint_{FrD} x dy - y dx = \int_{FrD} x dy = \int_{FrD} -y dx$$

Formula Gauss-Ostrogradski este analogul tridimensional al formulei Green-Riemann și stabilește o legătură între integrala de suprafață și integrala triplă.

Definiția 12.1.3.2. Pânza $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *închisă* dacă $p(u, 0) = p(u, 1)$ și $p(0, v) = p(1, v)$, oricare ar fi $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Pânza $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, cu $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu compact, se numește *închisă* dacă există o bijecție continuă și cu inversa continuă $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, astfel încât pânza $p \circ \varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ să fie închisă, în sensul de mai sus.

Se numește *suprafață închisă* o suprafață reprezentată de o pânză închisă.

Definiția 12.1.3.3. O mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este *domeniu compact elementar* dacă:

- este domeniu compact;
- este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Ox, fără puncte interioare comune;
- este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oy, fără puncte interioare comune;
- este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oz, fără puncte interioare comune;
- frontiera sa, $\text{Fr } \Omega$ este reuniunea unui număr finit de imagini de suprafețe închise și orientate.

Exemple. Sunt elementare următoarele domenii:

- sfera : $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$
- coroana sferică: $\{r_1^2 \leq (x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq r_2^2\}$
- cilindrul: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$
- elipsoidul: $\left\{(x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$

Observația 12.1.3.1. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară în punctul curent din $\text{Fr } \Omega$.

Teorema 12.1.3.3. (Formula lui Gauss-Ostrogradski)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar și

$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + V_2(x, y, z) \cdot \vec{j} + V_3(x, y, z) \cdot \vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce include pe Ω . Atunci fluxul câmpului vectorial \vec{V} prin $\text{Fr } \Omega$, după normala exterioară \vec{n} este egal cu integrala divergenței lui \vec{V} pe Ω , adică:

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Fr } \Omega} V_1(x, y, z) dy dz + V_2(x, y, z) dz dx + V_3(x, y, z) dx dy = \\ = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z) \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Observația 12.1.3.2. Formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\text{Fr } \Omega} (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega} (\text{div } \vec{V}) dx dy dz$$

se mai numește și formula flux-divergență, pentru că permite o interpretare fizică a divergenței unui câmp cu ajutorul fluxului printr-o suprafață închisă.

Corolarul 12.1.3.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar și U un câmp scalar de clasă C^1 pe o mulțime deschisă care îl conține pe Ω . Atunci:

$$\iiint_{\Omega} (\text{grad } U) dx dy dz = \iint_{\text{Fr } \Omega} \vec{n} \cdot U ds \quad (\text{formula integrală a gradientului})$$

Corolarul 12.1.3.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact elementar și \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă care îl conține pe Ω . Atunci:

$$\iiint_{\Omega} \text{rot } \vec{V} dx dy dz = \iint_{\text{Fr } \Omega} (\vec{n} \times \vec{V}) ds \quad (\text{formula integrală a rotorului})$$

Corolarul 12.1.3.3. Fie $G \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și $(x_0, y_0, z_0) \in G$ arbitrar. Fie $\vec{V} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe G și $U : G \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe G .

Fie $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de domenii compacte elementare incluse în G , astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Omega_n) = 0$ și $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

- a) $(\operatorname{div} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} \Omega_n} \iint_{\operatorname{Fr} \Omega_n} \vec{n} \cdot \vec{V} ds$
- b) $(\operatorname{rot} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} \Omega_n} \iint_{\operatorname{Fr} \Omega_n} \vec{n} \times \vec{V} ds$
- c) $(\operatorname{grad} U)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} \Omega_n} \iint_{\operatorname{Fr} \Omega_n} \vec{n} \cdot \nabla U ds$

Observația 12.1.3.3. Formulele din corolarul 12.1.3.3. arată că divergența și rotorul unui câmp vectorial, precum și gradientul unui câmp scalar, care au fost definite inițial folosind axele de coordonate, nu depind de alegerea acestor axe, ci depind de câmp și de punctul în care se calculează.

Definiția 12.1.3.4. Fie $G \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și S suprafața definită explicit de ecuația $z = f(x, y)$, orientată pozitiv.

Fie $D \subset G$ domeniu compact elementar,
 $(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ și
 $(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \operatorname{Fr} D\}$, cu orientarea indusă de pe $\operatorname{Fr} D$. Atunci (C) este imaginea unei curbe orientate în \mathbb{R}^3 și se numește *bordura orientată* a lui (S) .

Observația 12.1.3.4. Orientarea curbei (C) , indusă de orientarea de pe $\operatorname{Fr} D$ se numește orientare compatibilă cu orientarea suprafeței (S) .

Orientarea fixată pe bordura (C) , compatibilă cu cea a suprafeței (S) poate fi reprezentată intuitiv astfel: dacă $\vec{\xi}$ este vectorul tangent la curbă în punctul curent și \vec{n} este vectorul normal la suprafață în același punct, atunci un observator care se deplasează pe (C) în sensul lui $\vec{\xi}$, având capul spre \vec{n} , lasă în stânga suprafața (S) .

Definiția 12.1.3.5. Fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea unei suprafețe date. Dacă (S) este de clasă C^2 , orientată, și se poate descompune într-un număr finit de porțiuni de suprafață care pot fi reprezentate prin ecuații explicite în raport cu fiecare variabilă, atunci (S) se numește *suprafață elementară*. În acest caz, *bordura elementară* (C) a lui (S) este imaginea drumului închis obținut prin juxtapunerea drumurilor care au ca imagine arce de curbă incluse numai în una din bordurile porțiunilor componente.

Teorema 12.1.3.4. (Formula lui Stokes)

Fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață elementară și (C) bordura sa orientată. Fie \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă din \mathbb{R}^3 care conține pe (S) . Atunci circulația lui \vec{V} pe (C) este egală cu fluxul rotorului lui \vec{V} prin (S) , adică:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{n} ds$$

Observația 12.1.3.5. Din formula lui Stokes rezultă că fluxul rotorului unui câmp vectorial prin două suprafețe care au aceeași bordură este același.

12.1.4. Caracterizarea câmpurilor solenoidale

Definiția 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. Câmpul vectorial \vec{V} , de clasă C^1 pe D , se numește *solenoidal (fără surse)* în D , dacă $\text{div } \vec{V} = 0$ în D . \vec{V} se numește *câmp de rotori (câmp de vârtejuri, câmp rotațional)* în D , dacă există un câmp vectorial \vec{W} , de clasă C^2 în D , încât $\vec{V} = \text{rot } \vec{W}$ în D . În acest caz, \vec{W} se numește *potențialul vector al câmpului* \vec{V} .

Observația 12.1.4.1. Dacă \vec{V} este un câmp de rotori, atunci $\text{div } \vec{V} = \text{div}(\text{rot } \vec{W}) = 0$, deci \vec{V} este solenoidal. Din formula Gauss-Ostrogradski rezultă că, dacă \vec{V} este solenoidal în D , atunci fluxul lui \vec{V} prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul, justificând denumirea de “câmpuri fără surse” pentru câmpurile solenoidale. În teorema următoare se dă o caracterizare completă a câmpurilor solenoidale.

Teorema 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă și \vec{V} un câmp vectorial de clasă C^1 în D . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) \vec{V} este câmp solenoidal în D
- (b) \vec{V} este, local, un câmp de rotori (adică, pentru orice $a \in D$, există $r > 0$ și un câmp vectorial \vec{W} , de clasă C^2 în sfera $S(a, r) \subset D$, încât $\vec{V} = \text{rot } \vec{W}$ în $S(a, r)$)
- (c) fluxul lui \vec{V} prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul.

Observația 12.1.4.2. Pentru a determina un potențial vector \vec{W} , al câmpului \vec{V} se procedează astfel: se consideră \vec{W} de forma:

$$\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + W_2(x, y, z) \cdot \vec{j}, \quad (x, y, z) \in S(a, r), a = (x_0, y_0, z_0)$$

Din condiția $\text{rot } \vec{W} = \vec{V}$ se obține:

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = V_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial z} = -V_1, \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele lui \vec{V} .

Din primele două egalități rezultă că, pentru orice $(x, y, z) \in S(a, r)$ avem:

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z V_2(x, y, t) dt + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z V_1(x, y, t) dt + \varphi_2(x, y)$$

unde φ_1, φ_2 sunt funcții de clasă C^2 .

Ținând seama că $\text{div } \vec{V} = 0$, ultima egalitate devine:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0)$$

Este evident că există funcții φ_1, φ_2 , satisfăcând această egalitate. Cunoașterea unui potențial vector, particular este suficientă pentru găsirea oricărui alt potențial vector, dacă mulțimea D este *deschisă*

și stelată. În acest caz două câmpuri vectoriale \vec{W}_1 și \vec{W}_2 cu proprietatea că

$\text{rot } \vec{W}_1 = \vec{V}$ și $\text{rot } \vec{W}_2 = \vec{V}$ diferă printr-un câmp de gradienti.

Observația 12.1.4.3. În condițiile formulei lui Stokes, fluxul unui câmp solenoidal \vec{V} poate fi exprimat prin circulația unui potențial vector \vec{W} al lui \vec{V} și anume:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (\text{rot } \vec{W}) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

unde (C) este bordura orientată a lui (S).

12. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 12.2.1. Să se calculeze $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$, (S) fiind fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Soluție. Avem: $x = 2 \sin \theta \cos \varphi$, $y = 2 \sin \theta \sin \varphi$, $z = 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $A = 4 \sin^2 \theta \cos \varphi$, $B = 4 \sin^2 \theta \sin \varphi$, $C = 4 \sin \theta \cos \theta$.

Notând $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ și aplicând formula din observația 12.1.2.2. obținem:

$$\begin{aligned} \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy &= \iint_D (2 \sin \theta \cos \varphi \cdot 4 \sin^2 \theta \cos \varphi + \\ &+ 2 \sin \theta \sin \varphi \cdot 4 \sin^2 \theta \sin \varphi + 2 \cos \theta \cdot 4 \sin \theta \cos \theta) d\theta d\varphi = \\ &= 8 \iint_D (\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta d\varphi = \\ &= 8 \iint_D (\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta d\varphi = 8 \iint_D \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= 8 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 8 \cdot 2\pi \cdot 2 = 32\pi \end{aligned}$$

Exercițiul 12.2.2. Să se calculeze

$$\iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dx dy$$

pe fața superioară a suprafeței (S) definită prin $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluție. Ținând seama de observația 12.1.2.2. c) rezultă că

$$\vec{n} = \frac{-2x \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Cu formula din teorema 12.1.2.1. reducem problema la calculul unei integrale de suprafață de primul tip:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dx dy = \\ &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} [-2x^2z - 2y^2z + (x^2 + y^2)] dS \end{aligned}$$

Notând $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ obținem integrala:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D [(-2x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)] dx dy = \\ &= \iint_D (x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - 2y^2) dx dy \end{aligned}$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, obținem

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} r^2 (1 - 2r^2) r dr dt = \iint_{D^*} (r^3 - 2r^5) dr dt = \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^3 - 2r^5) dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - 2 \cdot \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{12} \right) = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercițiul 12.2.3. Calculați direct și folosind formula lui Green-Riemann $\oint_{\gamma} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, unde γ

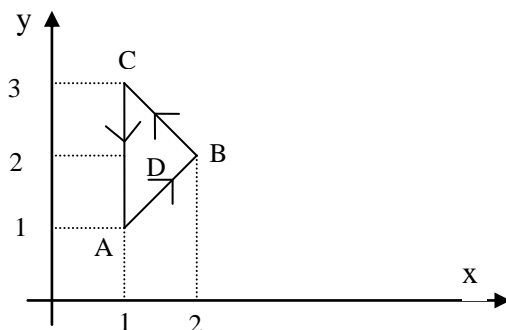
este triunghiul cu vârfurile A(1,1), B(2,2), C(1,3), parcurs o dată în sens pozitiv.

Soluție. γ este reuniunea segmentelor AB, BC, CA, unde:

AB: $y = x$, $x \in [1, 2]$

CB: $y = 4 - x$, $x \in [1, 2]$

AC: $x = 1$, $y \in [1, 3]$



$$\begin{aligned}
 \text{Atunci } \oint_{\gamma} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy &= \int_{AB} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy + \\
 &+ \int_{BC} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy + \int_{CA} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \\
 &\int_1^2 [2(x^2 + x^2) + (x + x)^2]dx + \int_2^1 [2(x^2 + (4-x)^2) + (x + 4-x)^2 \cdot (-1)]dx + \\
 &\int_3^1 [2(1 + y^2) \cdot 0 + (1 + y)^2 \cdot 1]dy = \int_1^2 8x^2 dx + \int_2^1 (4x^2 - 16x + 16)dx \\
 &+ \int_3^1 (y^2 + 2y + 1)dy = \int_1^2 (4x^2 + 16x - 16)dx + \left(\frac{y^3}{3} + y^2 + y \right) \Big|_3^1 = \\
 &= \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{16x^2}{2} - 16x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{y^3}{3} + y^2 + y \right) \Big|_3^1 = -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Aplicând acum formula Green-Riemann obținem:

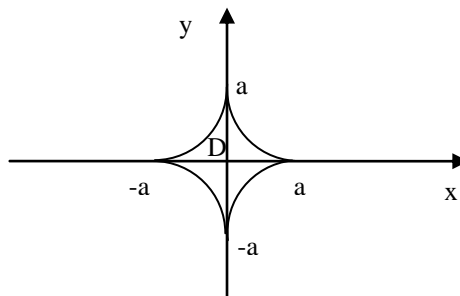
$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} ((x + y)^2) - \frac{\partial}{\partial y} (2(x^2 + y^2)) \right] dx dy = \\
 &= \iint_D [2(x + y) - 4y] dx dy = 2 \iint_D (x - y) dx dy = 2 \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} (x - y) dy \right] dx \\
 &= 2 \int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{4-x} dx = 2 \int_1^2 (8x - 2x^2 - 8) dx = -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Exercițiul 12.2.4. Folosind integrala curbilinie de speța a II-a, să se calculeze aria figurii limitată de curba de ecuație

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

$a > 0$.

Soluție.

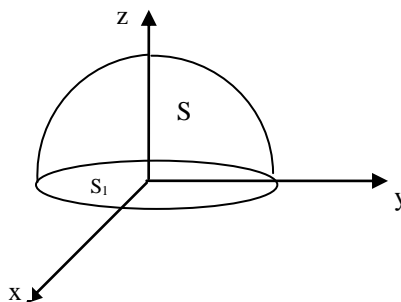


Curba de ecuație $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ (astroida) are ecuațiile parametrice $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Aria sa este } A &= \frac{1}{2} \int_{FrD} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t \cdot (3a \sin^2 t \cos t) - a \sin^3 t \cdot (-3a \cos^2 t \sin t)] dt \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3a^2}{16} \cdot 2\pi = \frac{3a^2 \pi}{8} \end{aligned}$$

Exercițiul 12.2.5. Să se calculeze $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + x^3 dx dy$ pe fața exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

Soluție. Considerăm $\Omega = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, care este un domeniu compact elementar.



Frontiera sa este reuniunea a două suprafețe având imaginile:

$$(S) = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

$$(S_1) = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\begin{aligned} \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + x^3 dx dy + \iint_{S_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + x^3 dx dy &= \\ &= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \end{aligned}$$

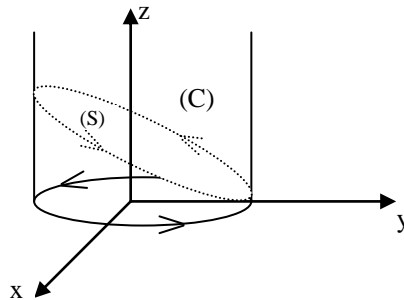
$$\text{Dar } \iint_{S_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + x^3 dx dy = 0 \text{ și } \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \iiint_{[0,R] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi]} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 3 \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (\varphi \Big|_0^{2\pi}) = \frac{6\pi R^5}{5}.$$

$$\text{Rezultă că } \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + x^3 dxdy = \frac{6\pi R^5}{5} - 0 = \frac{6\pi R^5}{5}$$

Exercițiul 12.2.5. Să se calculeze folosind formula lui Stokes circulația câmpului $\vec{V} = (y-x)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ pe elipsa (C) obținută prin intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $y + z = 1$, parcursă în sens direct.

Soluție.



În acest caz rot $\vec{V} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Alegem drept suprafață ce are bordura orientată (C), porțiunea din planul $y + z = 1$, limitată de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{Ea are ecuația } \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v, (u, v) \in D \end{cases}, \text{ unde } D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Din formula lui Stokes rezultă :

$$\oint_{(C)} (y-x)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint_{(D)} -2(dydz + dzdx + dxdy) = -2 \iint_{(D)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dudv = -4\text{aria}(D) = -4\pi$$

Exercițiul 12.2.6. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xyz \cdot \vec{i} + xyz \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} z^2(x+y) \vec{k}$$

este solenoidal în \mathbb{R}^3 .

Soluție. Punând $V_1(x, y, z) = xyz$, $V_2(x, y, z) = xyz$, $V_3(x, y, z) = -\frac{1}{2} z^2(x+y)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avem

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = yz + xy - z(x+y) = 0$$

Prin urmare \vec{V} este solenoidal în \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 12.2.7. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2) \vec{k}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din \mathbb{R}^3 este nul

Soluție. Notând $V_1(x, y, z) = xy^2$, $V_2(x, y, z) = x^2y$, $V_3(x, y, z) = -z(x^2 + y^2)$, avem:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = y^2 + x^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Deci câmpul \vec{V} este solenoidal în \mathbb{R}^3 . Din teorema 12.1.4.1. rezultă afirmația.

Exercițiul 12.2.8. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2) \vec{k}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

este un câmp de rotori în \mathbb{R}^3 și să se determine un potențial vector pentru \vec{V} .

Soluție. Câmpul \vec{V} este solenoidal în \mathbb{R}^3 (exercițiul 12.3.9). Din teorema 12.1.4.1. rezultă că \vec{V} este, local, un câmp de rotori în \mathbb{R}^3 . Căutăm un potențial vector de o formă particulară:

$$\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + W_2(x, y, z) \cdot \vec{j}$$

Egalitatea $\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{V}$ conduce la :

$$\begin{aligned} W_1(x, y, z) &= \int_{z_0}^z V_2(x, y, t) dt + \varphi_1(x, y) = \int_{z_0}^z x^2 y dt + \varphi_1(x, y) = \\ &= x^2 y(z - z_0) + \varphi_1(x, y) \\ W_2(x, y, z) &= - \int_{z_0}^z V_1(x, y, t) dt + \varphi_2(x, y) = - \int_{z_0}^z xy^2 dt + \varphi_2(x, y) = \\ &= -xy^2(z - z_0) + \varphi_2(x, y) \end{aligned}$$

unde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este fixat, arbitrar, iar φ_1 și φ_2 se aleg astfel ca:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0),$$

adica:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -z_0(x^2 + y^2)$$

Putem alege, de exemplu, $\varphi_1(x, y) = z_0 \frac{y^3}{3}$, $\varphi_2(x, y) = -z_0 \frac{x^3}{3}$

Deci: $W_1(x, y, z) = x^2 y z - x^2 y z_0 + z_0 \frac{y^3}{3} = x^2 y z - y z_0 (x^2 - \frac{y^2}{3})$

$$W_2(x, y, z) = -x y^2 z + x y^2 z_0 - z_0 \frac{x^3}{3} = -x y^2 z + x z_0 (y^2 - \frac{x^2}{3})$$

iar câmpul vectorial $\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + W_2(x, y, z) \cdot \vec{j}$ este un potențial vector pentru \vec{V} într-o sferă cu centrul în (x_0, y_0, z_0) . Se verifică imediat că egalitatea $\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{V}$ este adevărată în întreg \mathbb{R}^3 , deci \vec{W} este un potențial vector pentru \vec{V} în \mathbb{R}^3 . Cum \mathbb{R}^3 este mulțime deschisă și stelată, rezultă că orice alt potențial vector pentru \vec{V} este de forma

$\vec{W} + \operatorname{grad} U$, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 12.2.9. Să se determine fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2y \cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2) \vec{k}$$

prin fața exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

Soluție. Câmpul \vec{V} este solenoidal în \mathbb{R}^3 (vezi exercițiul 12.3.9.), iar

$\vec{W}(x, y, z) = x^2 y z \cdot \vec{i} - x y^2 z \cdot \vec{j}$ este un potențial vector pentru \vec{V} (în exercițiul 12.3.10 am considerat $z_0 = 0$). Ținând seama de observația 12.1.4.3. fluxul căutat este:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

unde (S) este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, iar (C) este bordura sa orientată, adică cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ orientat pozitiv. Ecuațiile parametrice ale cercului (C) fiind $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t \in [0, 2\pi]$, rezultă:

$$\int_C \vec{W} \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 y z dx - x y^2 z dy = 0,$$

prin urmare fluxul căutat este nul.

Exercițiul 12.2.10. Să se calculeze:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy$$

unde (S) este fața inferioară a porțiunii de paraboloid $z = x^2 + (y - 1)^2$ cuprinsă în cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Soluție. Este evident că $\vec{V}(x, y, z) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ este solenoidal în \mathbb{R}^3 și că, de exemplu $\vec{W}(x, y, z) = z \cdot \vec{i} + (x + z) \cdot \vec{j}$ este un potențial vector al său. Notând cu (C) bordura orientată a suprafeței (S), aceasta este curba dată de:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y - 1)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

parcursă în sens invers trigonometric, când se privește din origine și are reprezentarea parametrică:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = \cos^2 t + (\sin t - 1)^2, t \in [0, 2\pi]$$

Ținând seama de observația 12.1.4.3. avem:

$$\begin{aligned} \iint_S -dydz + dzdx + dxdy &= \int_C z dx + (x + z) dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [-(2 - 2 \sin t) \sin t + (2 + \cos t - 2 \sin t) \cos t] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t + \sin^2 t + 1 + 2 \cos t - \sin 2t) dt = \\ &= \left(2 \cos t + 2 \sin t + \frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 2\pi = \\ &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + 2\pi = \pi + 2\pi = 3\pi \end{aligned}$$

12. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.3. Exerciții propuse

Exercițiul 12.3.1. Să se calculeze:

a) $\iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, (S) fiind fața exterioară a sferei

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4;$

b) $\iint_{(S)} \frac{dy dz}{3x} + \frac{dz dx}{2y} + \frac{dx dy}{2z}$, (S) fiind fața interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1;$

c) $\iint_{(S)} (x^2 + y^2) z dx dy$, (S) fiind fața superioară a porțiunii de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1;$

d) $\iint_S yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy$, (S) fiind fața exterioară a tetraedrului determinat de planele $x = 0, y = 0, z = 0,$
 $x + y + z = 1.$

R. a) $\frac{256\pi}{3}$, b) $-\frac{124\pi}{9}$, c) $\frac{25\pi}{84}$, d) 0.

Exercițiul 12.3.2. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori:

a) $\vec{V} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ prin fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h;$

b) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1.$

R. a) 0, b) π

Exercițiul 12.3.3. Să se calculeze cu ajutorul formulei Green-Riemann următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint_{FrD} e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy)$, unde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\};$

b) $\oint_{FrD} (xy - y) dx + (xy + x) dy$, unde $D = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\};$

c) $\oint_{FrD} (x - y) dx + dy$, unde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\};$

R. a) $2\pi e$; b) $2\pi ab$; c) $\frac{\pi}{2}$

Exercițiul 12.3.4. Să se calculeze direct și aplicând formula Green-Riemann:

a) $\oint_{FrD} (x + y) dx - (x - y) dy$, unde $D = \{(x, y), x^2 - 1 \leq y \leq 3x - 3\};$

b) $\oint_{FrD} (2x + 3y^2) dx + (x^2 + y) dy$, unde $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$

R. a) $-\frac{1}{3}$; b) 0.

Exercițiul 12.3.5. Folosind integrala curbilinie, să se calculeze:

a) aria figurii mărginită de curba $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \sin 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

- b) aria figurii mărginită de curba de ecuație $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata lui Bernoulli)
 c) aria figurii mărginită de curba de ecuație $x = a \sin 2\varphi \cos \varphi$,

$$y = a \sin 2\varphi \sin \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

R. a) $4\pi a^2$; b) $2a^2$; c) $\frac{\pi a^2}{8}$.

Indicații. b) ecuațiile parametrice ale curbei sunt $x = a \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t$;

$$y = a \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Exercițiul 12.3.6. Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafață de al doilea tip:

a) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ pe fața exterioară a sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

b) $\iint_S x^3 y^2 dydz + x^2 y^3 dzdx + 3z dxdy$ pe fața exterioară a frontierei domeniului mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$;

c) $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$ pe fața exterioară a piramidei mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

R. a) $\frac{12\pi}{5} a^5$; b) 27π ; c) $\frac{a^3}{2}$.

Exercițiul 12.3.7. Arătați că volumul corpului compact elementar, mărginit de suprafața S este, $V = \frac{1}{3} \iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$.

R. Se aplică formula Gauss-Ostrogradski. Se poate observa că

$$V = \iint_S V_1(x, y, z) dydz + V_2(x, y, z) dzdx + V_3(x, y, z) dxdy,$$

dacă $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 1$.

Exercițiul 12.3.8. Să se calculeze $I = \iint_S xz dydz + xz^3 dzdx + yz dxdy$ pe fața exterioară a suprafeței

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0.$$

Indicație. Se completează S astfel încât să se obțină frontiera jumătății de elipsoid $\left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\right\}$, se aplică formula Gauss-Ostrogradski și se arată că integrala este 0 pe porțiunea de frontieră din planul xOy .

R. $I = \frac{\pi abc^2}{8}$.

Exercițiul 12.3.9. Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint_{(C)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$, unde (C) este intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu planul $x + y + z = a$, parcursă odată în sens direct față de Ox

b) $\oint_{(C)} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, unde (C) este conturul

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = a$$

c) $\oint_{(C)} x^2 y^3 dx + dy + z dz$, unde (C) este circumferința $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$

d) $\oint_{(C)} zxdx + xydy + yzdz$, unde (C) este curba de intersecție a cilindrului $x^2 + y^2 = R^2$ cu planele de coordonate și cu planul $z = h, h > 0$, situată în primul octan.

R. a) 0; b) 0; c) $-\frac{\pi}{8} R^6$; d) $\frac{1}{2} Rh(R + h)$

Exercițiul 12.3.10. Să se demonstreze că :

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + \vec{k}$$

este solenoidal în \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 12.3.11. Se consideră câmpul vectorial exprimat în coordonate cilindrice prin:

$$\vec{V}^*(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r + \theta \cdot \vec{e}_\theta - \frac{z}{r} \vec{e}_z, r > 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}$$

Să se demonstreze că acest câmp este solenoidal.

Exercițiul 12.3.12. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + \vec{k}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din \mathbb{R}^3 este nul.

Exercițiul 12.3.13. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + \vec{k}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

este un câmp de rotori în \mathbb{R}^3 și să se determine un potențial vector pentru \vec{V} .

R. $\vec{W}(x, y, z) = z(1 - yz) \vec{i} + 2x(1 - yz) \vec{j} + \text{grad } U$, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în \mathbb{R}^3 .

Exercițiul 12.3.14. Să se determine fluxul câmpului vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + \vec{k},$$

prin fața exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

R. π